

RDM 1ère année ENTPE  
Résistance des matériaux – partie 2  
Corrections des exercices

Boris TEDOLDI  
Ingénieur structure

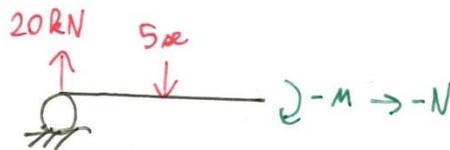


Calcul Structure Bâtiment  
2 chemin des maisonnettes BP19  
39150 SAINT LAURENT EN GDX  
<http://www.csb.bet>

1. Réponse exercice [ 1 ].....	3
2. Réponse exercice [ 1 ].....	4
3. Réponse exercice [ 1 ].....	5
4. Réponse exercice [ 2 ].....	7
5. Réponse exercice [ 3 ].....	10
6. Réponse exercice [ 4 ].....	15
7. Réponse exercice [ 5 ].....	16
8. Réponse exercice [ 6 ].....	17
9. Réponse exercice [ 7 ].....	19
10. Réponse exercice [ 8 ] .....	21
11. Réponse exercice [ 9 ] .....	23
12. Réponse exercice [ 10 ] .....	24
13. Réponse exercice [ 11 ] .....	26
14. Réponse exercice [ 12 ] .....	29
15. Réponse exercice [ 13 ] .....	34
16. Réponse exercice [ 14 ] .....	35
17. Réponse exercice [ 15 ] .....	38
18. Réponse exercice [ 16 ] .....	46
19. Réponse exercice [ 17 ] .....	46
20. Réponse exercice [ 18 ] .....	46
21. Réponse exercice [ 19 ] .....	46
22. Réponse exercice [ 20 ] .....	49
23. Réponse exercice [ 21 ] .....	51

### 1. Réponse exercice [ 1 ]

1) Coupure en  $x$

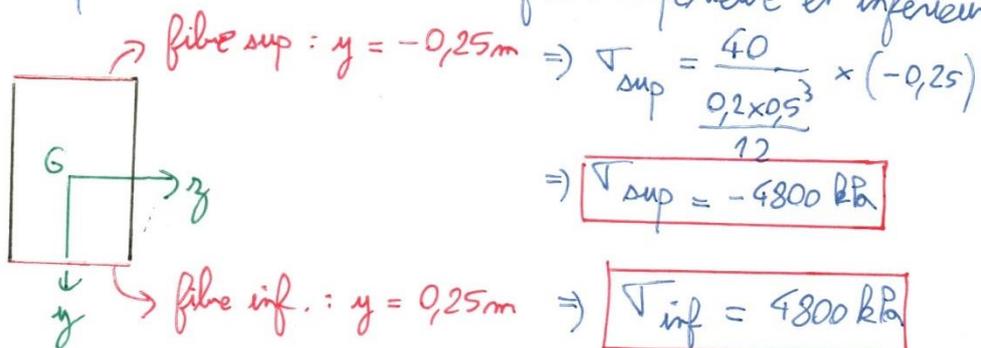


$$N=0 \quad V_x$$

$$M(x) = 20x - 2,5x^2$$

•  $M_{\max} = M(x=4m) = \underline{40 \text{ kN.m}}$

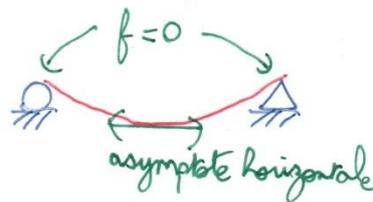
• En flexion simple autour de  $\vec{z}$ , les points les plus sollicités sont les points au niveau de la fibre supérieure et inférieure.



2) •  $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{-M}{Ei} = \frac{1}{Ei} (-20x + 2,5x^2)$

• La forme de la flèche est :

donc  $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \frac{df(4m)}{dx} = 0 \end{cases}$



•  $\frac{df}{dx} = \frac{1}{Ei} \left( -10x^2 + \frac{2,5}{3}x^3 + A \right)$  or  $\frac{df(4m)}{dx} = 0$  donc  $A = \frac{320}{3}$

•  $f(x) = \frac{1}{Ei} \left( -\frac{10}{3}x^3 + \frac{2,5}{12}x^4 + Ax + B \right)$  or  $f(0) = 0$  donc  $B = 0$

Au final

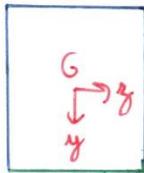
$$f(\alpha) = \frac{1}{25 \cdot 10^9 \times \frac{0,2 \times 0,5^3}{12}} \left[ \frac{-10 \alpha^3}{3} + \frac{2,5}{12} \alpha^4 + \frac{320}{3} \alpha \right] \times 1000$$

car le moment  
est initialement  
exprimé en kN.m

$$f_{\max} = f(\alpha = 4 \text{ m}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

## 2. Réponse exercice [ 2 ]

$$M_{\max} = 6F$$



$$y_{\text{inf}} = 0,6 \text{ m} \rightarrow \sigma_{\text{inf}} = \sigma_{\max} = \frac{6F}{I} y_{\text{inf}} \leq \overline{\sigma}_{\text{matériau}}$$

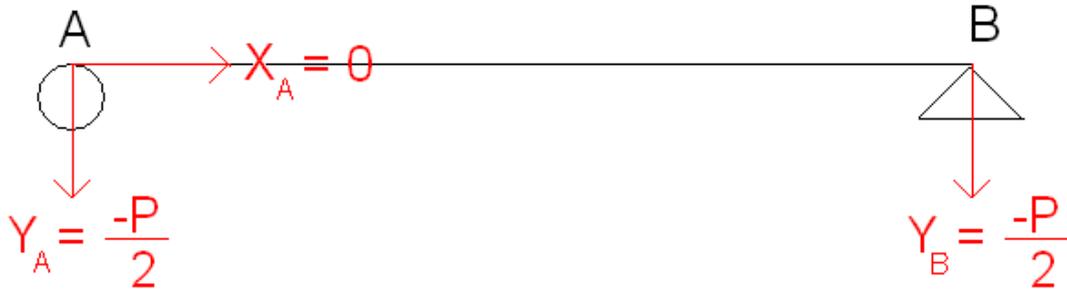
$$\Rightarrow \frac{6F}{\frac{0,5 \times 12^3}{12}} \times 0,6 \leq 10^7$$

$$\Rightarrow F \leq 200000 \text{ N} \leftrightarrow 20 \text{ tonnes}$$

### 3. Réponse exercice [ 3 ]

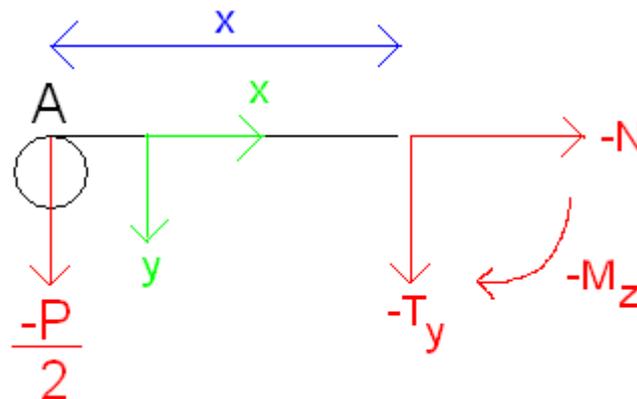
#### Calcul du torseur de sollicitations

##### 1) Réactions d'appuis



##### 2) Coupure en x pour $x < L/2$

**Remarque** : inutile de calculer le torseur pour  $x > L/2$  puisqu'il est symétrique par symétrie du problème.



#### Equilibre de la section d'abscisse x :

Effort normal N :  $N = 0$

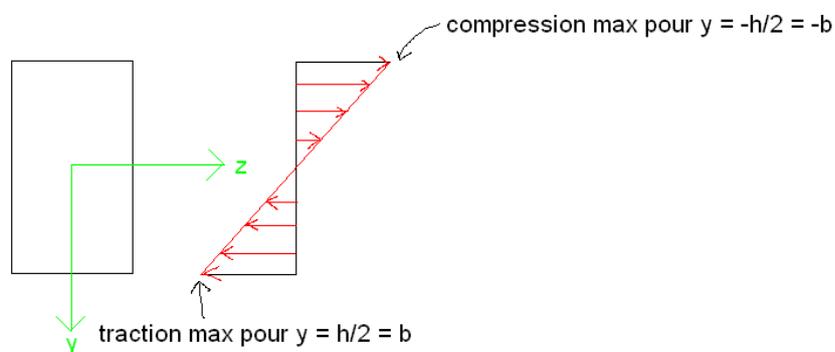
Effort tranchant :  $-T_y - \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow T_y = -\frac{P}{2}$

Moment fléchissant :  $-M_z + \frac{Px}{2} = 0 \Rightarrow M_z = \frac{Px}{2}$

#### Calcul de la contrainte normale

Le moment est maximal pour l'abscisse  $x = L/2$ , donc  $M_{zmax} = M_z \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{PL}{4}$

Le diagramme des contraintes normales de la section est :



La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours :  $\sigma_x = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

Or  $N=0$

Et d'après le cours :  $I_z = \frac{bh^3}{12}$

Et puisque  $b=h/2$ , l'inertie est finalement égale à  $I_z = \frac{h^4}{24}$

$$\text{D'où } \sigma_x = \frac{24M_z}{h^4} y$$

D'après le diagramme des contraintes normales, le maximum est obtenu pour  $y = h/2$ .

$$\text{Ainsi, } \sigma_{x\max} = \frac{24M_{z\max}}{h^4} \times \frac{h}{2} = \frac{12M_{z\max}}{h^3}$$

La condition  $\sigma_{x\max} \leq \bar{\sigma}$  se traduit par 
$$h \geq \sqrt[3]{\frac{3PL}{\bar{\sigma}}}$$

### Calcul de la flèche maximale (hors programme)

La relation de cours est  $EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_z(x)$

Avec :  $\begin{cases} E \text{ le module de Young du matériau} \\ v \text{ la fonction donnant la flèche} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI_z} \times \left( -\frac{Px}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI_z} \times \left( -\frac{Px^2}{4} + A \right)$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{EI_z} \times \left( -\frac{Px^3}{12} + Ax + B \right)$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites suivantes :

*{ la flèche à l'abscisse  $x = 0$  est nulle*

*{ la dérivée de la flèche au centre de la poutre est nulle*

$$\Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ \frac{dv}{dx}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{PL^2}{16} \\ B = 0 \end{cases}$$

Au final, l'équation de la flèche pour les abscisses comprises entre 0 et  $L/2$  est :

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \times \left( -\frac{Px^3}{12} + \frac{PL^2}{16} x \right)$$

Or la flèche maximale  $f_{\max}$  est la flèche au centre de la poutre :

$$\text{Donc } f_{\max} = v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{EI_z} \times \left( -\frac{PL^3}{96} + \frac{PL^3}{32} \right) = \frac{PL^3}{48EI_z}$$

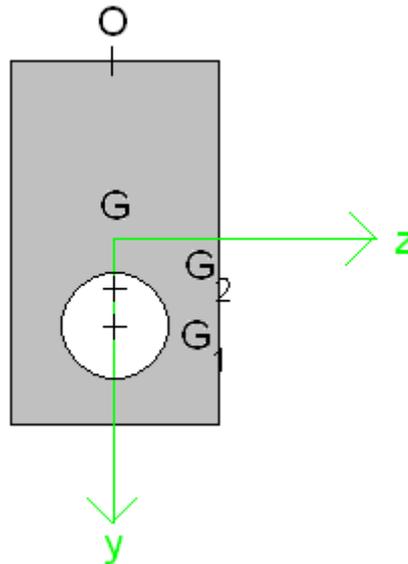
La condition  $f_{\max} \leq \bar{f} = \frac{L}{200}$  se traduit par  $\frac{PL^3}{48EI_z} \leq \frac{L}{200}$

$$\text{Avec } I_z = \frac{h^4}{24}$$

D'où au final, 
$$h \geq \sqrt[4]{\frac{100PL^2}{E}}$$

#### 4. Réponse exercice [ 4 ]

##### 1) Position du centre de gravité de la section



La section se décompose en deux sections élémentaires :

Section 1 : cercle de centre de gravité  $G_1$

Position du centre de gravité :  $\overline{OG}_1 = 30 \text{ cm}$

Aire :  $A_1 = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78,5 \text{ cm}^2$

Section 2 : cercle de centre de gravité  $G_2$

Position du centre de gravité :  $\overline{OG}_2 = 25 \text{ cm}$

Aire :  $A_2 = 50^2 = 2500 \text{ cm}^2$

Au final, la section est la soustraction de la section 1 à la section 2, d'où la position du centre de gravité  $G$  de la section :

$$\overline{OG} = \frac{-\overline{OG}_1 \times A_1 + \overline{OG}_2 \times A_2}{-A_1 + A_2} = 24,8 \text{ cm}$$

##### Calcul de l'inertie $I_z$

Section 1 :

Par application du cours et du théorème de Huygens, l'inertie de la section 1 est :

$$I_{Gz}^{[1]} = \frac{\pi \times d^4}{64} + A_1 \times \overline{GG}_1^2 = \frac{\pi \times 10^4}{64} + 78,5 \times (30 - 24,8)^2 = 2613 \text{ cm}^4$$

Section 2 :

Par application du cours et du théorème de Huygens, l'inertie de la section 2 est :

$$I_{Gz}^{[2]} = \frac{c^4}{12} + A_2 \times \overline{GG}_2^2 = \frac{50^4}{12} + 2500 \times (25 - 24,8)^2 = 520933 \text{ cm}^4$$

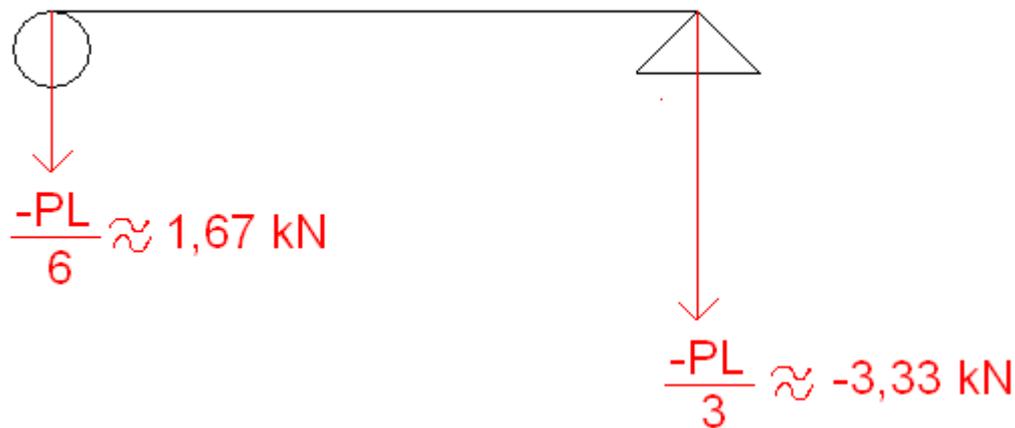
Au final, la section étant la soustraction de la section 1 à la section 2, l'inertie est :

$$I_{Gz} = I_{Gz}^{[2]} - I_{Gz}^{[1]} = 518320 \text{ cm}^4 \approx 0,0052 \text{ m}^4$$

##### 2) Calcul du moment fléchissant maximal $M_{z\max}$

D'après la correction des exercices de la séance 3 (en remplaçant q par p) :

$$\text{Les réactions d'appui sont : } \begin{cases} X_B = 0 \\ Y_B = \frac{-pL}{3} \\ Y_A = \frac{-pL}{6} \end{cases}$$



L'équation du moment fléchissant est  $M_z = \frac{-px^3}{6L} + \frac{pLx}{6} \approx -0,067x^3 + 1,667x$  [kN.m]

Le moment fléchissant est maximal, lorsque la dérivée du moment est nul, donc :

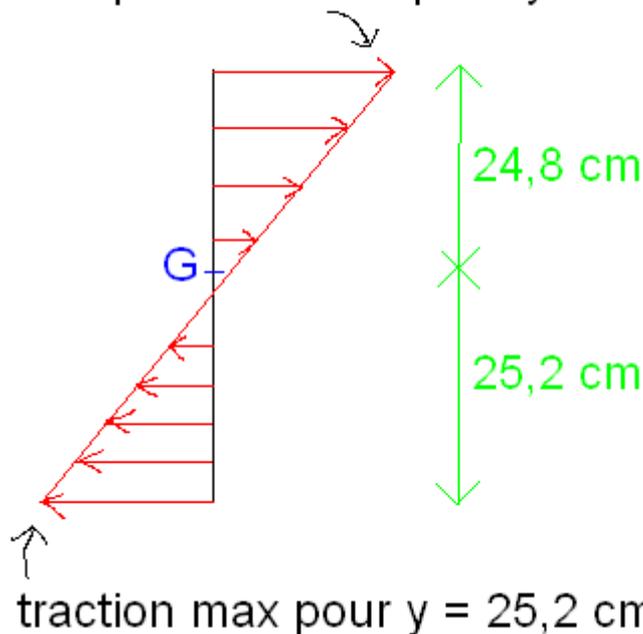
$$\frac{dM_z(x_0)}{dx} = \frac{-px_0^2}{2L} + \frac{pL}{6} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 2,89 \text{ m}$$

Au final,  $M_{zmax} = M_z(x_0 = 2,89\text{m})$

D'où  $M_{zmax} = 3,20 \text{ kN.m}$

### 3) Calcul des contraintes maximales et minimales

compression max pour  $y = -24,8 \text{ cm}$



*Remarque importante* : il ne faut **pas** calculer les contraintes à  $\mp c/2$  puisque le centre de gravité G est décalé du centre du carré  $G_2$ ... mais bien aux ordonnées des fibres supérieure et inférieure par rapport à G.

La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours :  $\sigma_x = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

*Remarque* :  $N = 0$  dans cet exercice (cas de la flexion simple)

Compression maximale:  $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y_{\text{fibre sup}} = \frac{3,20}{0,0052} \times (-0,248) = -152,6 \text{ kPa}$

Traction maximale:  $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y_{\text{fibre inf}} = \frac{3,20}{0,0052} \times (+0,252) = 155,1 \text{ kPa}$

#### 4) Calcul de la flèche maximale (hors programme)

La relation de cours est  $EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_z(x)$

Avec :  $\begin{cases} E \text{ le module de Young du matériau} \\ v \text{ la fonction donnant la flèche} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1000}{EI_z} \times (0,067x^3 - 1,667x)$$

*Remarque* : le facteur « 1000 » en numérateur permet de ramener l'équation du moment à l'unité internationale [N.m]

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1000}{EI_z} \times \left( \frac{67}{4000} x^4 - \frac{1667}{2000} x^2 + A \right)$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1000}{EI_z} \times \left( \frac{67}{20000} x^5 - \frac{1667}{6000} x^3 + Ax + B \right) \text{ [m]}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites suivantes :

$\begin{cases} \text{la flèche à l'abscisse } x = 0 \text{ est nulle} \\ \text{la flèche à l'abscisse } x = L \text{ est nulle} \end{cases}$

$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(5 \text{ m}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4,85 \\ B = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(5 \text{ m}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4,85 \\ B = 0 \end{cases}$

Au final, l'équation de la flèche est :

$$v(x) = \frac{1000}{2 \cdot 10^{11} \times 0,0052} \times \left( \frac{67}{20000} x^5 - \frac{1667}{6000} x^3 + 4,85x \right)$$

Or la flèche maximale  $f_{\text{max}}$  lorsque la dérivée de la flèche est nulle :

$$\frac{dv(x_0)}{dx} = \frac{1}{EI_z} \times \left( \frac{67}{4000} x_0^4 - \frac{1667}{2000} x_0^2 + 4,85 \right) = 0 \Rightarrow x_0 = 2,59 \text{ m}$$

Donc  $f_{\text{max}} = v(x_0 = 2,59 \text{ m}) = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,08 \text{ mm}$

#### 5) Bilan de l'exercice

La compression maximale subie par le matériau est de **152,6 kPa** à l'abscisse **x= 2,89 m**.

La traction maximale subie par le matériau est de **155,1 kPa** à l'abscisse **x= 2,89 m**.

La flèche maximale  $f_{\text{max}}$  est égale à **0,08 mm** à l'abscisse **x= 2,59 m**.

## 5. Réponse exercice [ 5 ]

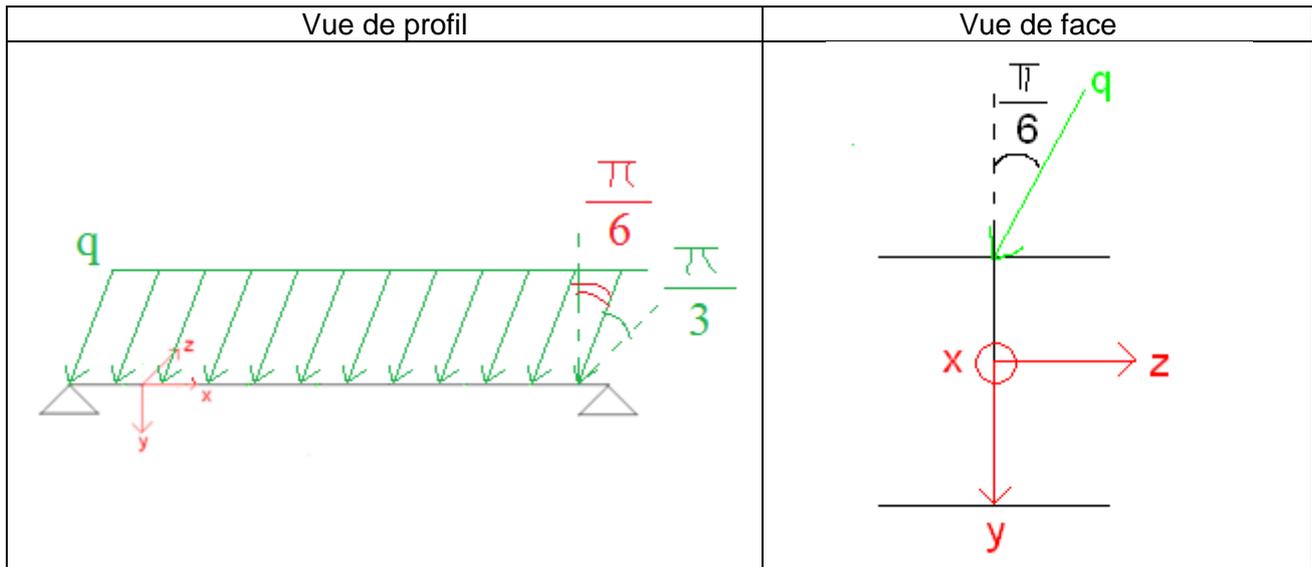
### 1) Condition « $\sigma_{max} \leq 200 \text{ MPa}$ » sous le chargement « Q » seul

#### Charge linéique à considérer

La charge donnée par l'énoncé est une charge sufacique. Or, en RDM, la charge à considérer dans les calculs est linéique. L'entraxe des pannes est de 4 m donc la charge linéique est :

$$q = 250 \text{ kg/m}^2 \times 4 \text{ m} = \boxed{1000 \text{ kg/m}}$$

#### Calcul du moment

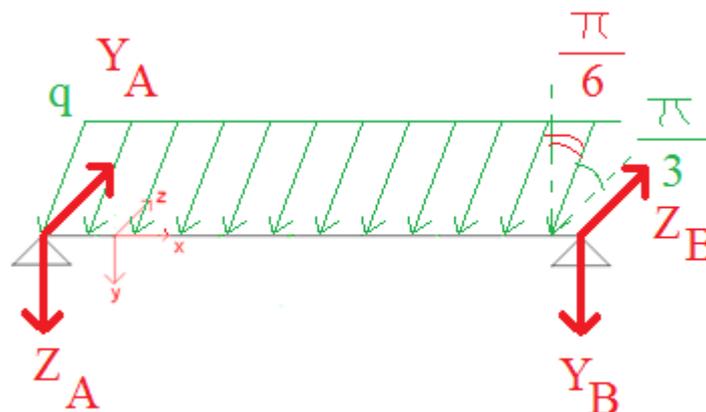


On peut calculer selon 2 méthodes :

- Une méthode 3D (méthode 1)
- Une méthode consistant à se ramener à 2 problèmes 2D (méthode2)

#### a) Méthode 1

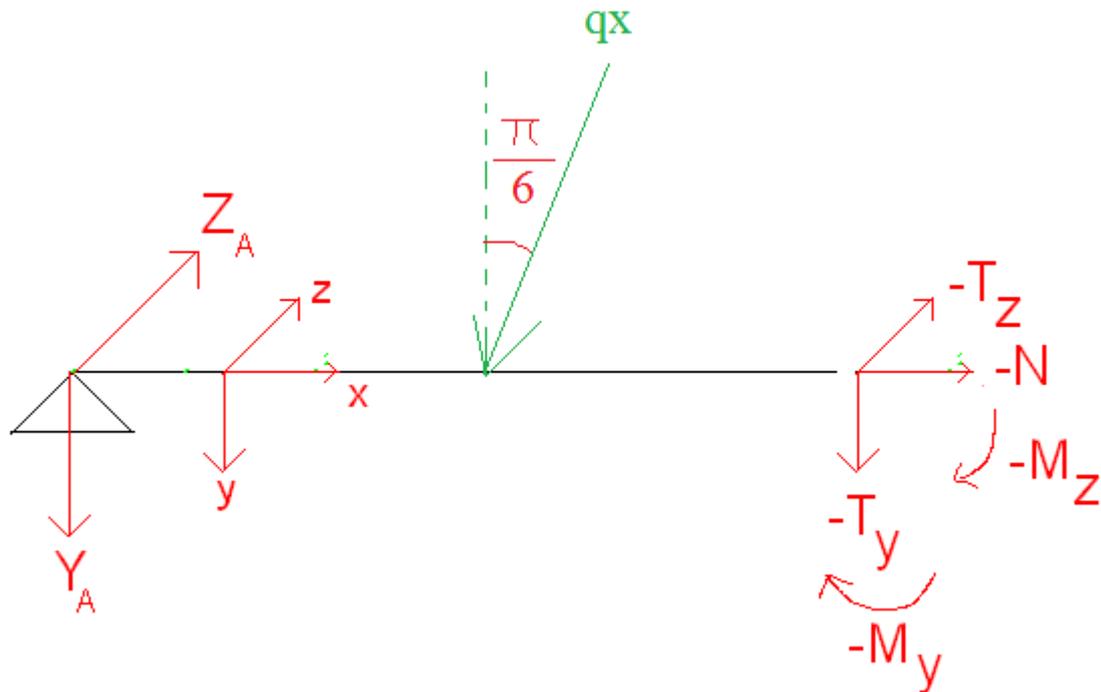
Le problème en 3D se résume par le schéma suivant



Les réactions d'appuis sont :

$$\begin{cases} Z_A = Z_B = \frac{qL}{2} \sin \alpha \\ Y_A = Y_B = -\frac{qL}{2} \cos \alpha \end{cases}$$

La coupure en x est :



L'équilibre en moment fléchissant est :

$$\begin{pmatrix} -M_x \\ -M_y \\ -M_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \cos \alpha \\ \frac{qL}{2} \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ qx \cos \alpha \\ -qx \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = \frac{qx \sin \alpha}{2} (L - x) \\ M_z = \frac{qx \cos \alpha}{2} (L - x) \end{cases}$$

Or, d'après les exercices de la séance 2, les moments maximaux sont au centre de la poutre ( $x=L/2$ ), il vient alors que :

$$\begin{cases} M_{y_{max}} = \frac{qL^2 \sin \alpha}{8} \\ M_{z_{max}} = \frac{qL^2 \cos \alpha}{8} \end{cases}$$

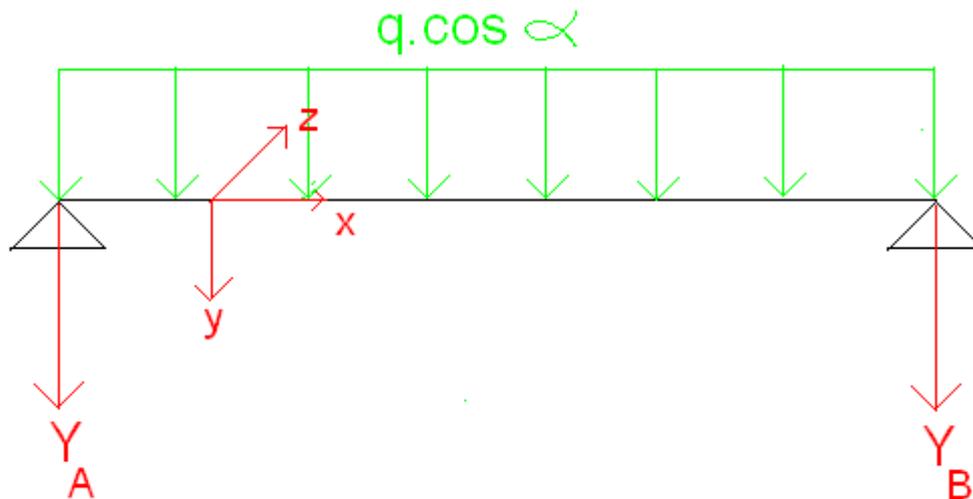
Remarques :

- la condition ne portant que pour la contrainte normale, il est inutile de calculer l'effort tranchant.
- L'effort normal N est nul

b) Méthode 2

On décompose selon les deux directions Y et Z

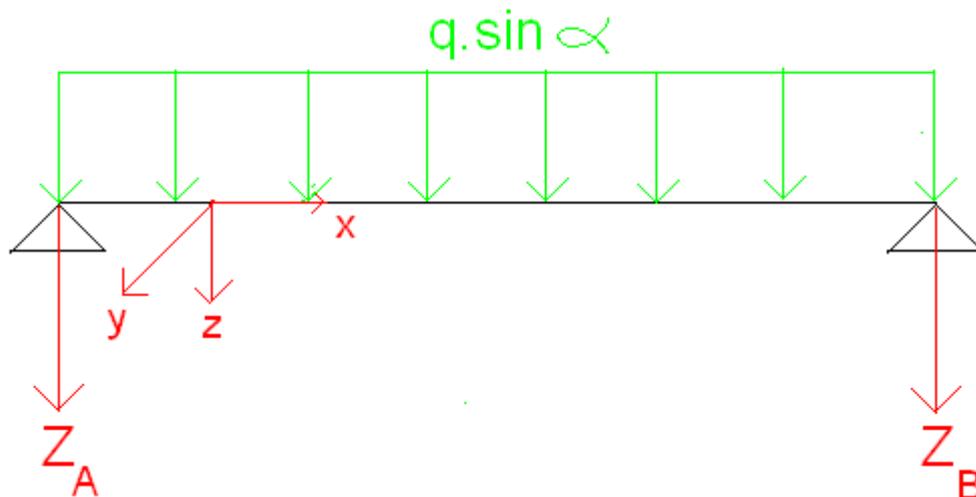
Direction Y :



Après calculs (déjà réalisés à la séance 2), le moment fléchissant autour de l'axe z est :

$$M_{zmax} = \frac{qL^2 \cos \alpha}{8}$$

Direction Z :



Après calculs (déjà réalisés à la séance 2), le moment fléchissant autour de l'axe y est :

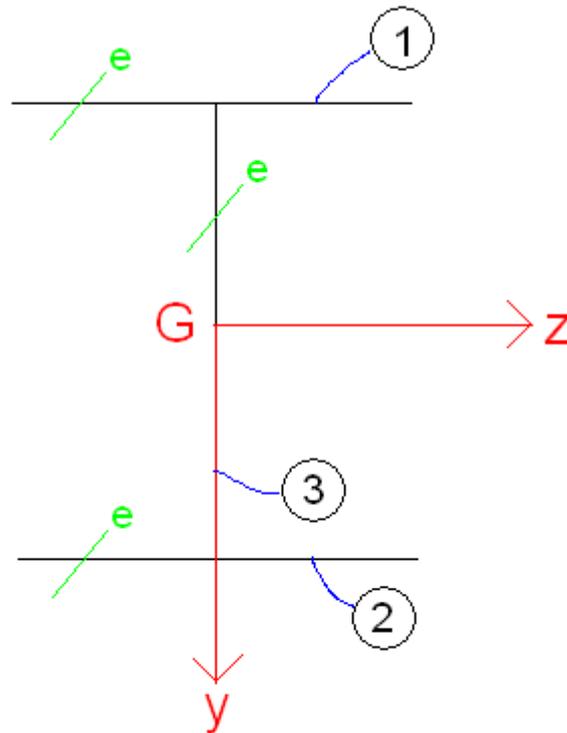
$$M_{ymax} = \frac{qL^2 \sin \alpha}{8}$$

c) Bilan des méthodes 1 et 2

Les moments fléchissants maximaux (donc dimensionnant) sont :

$$\begin{cases} M_{ymax} = \frac{qL^2 \sin \alpha}{8} \\ M_{zmax} = \frac{qL^2 \cos \alpha}{8} \end{cases}$$

Calcul des inerties



1) Aile 1 :

Centre de gravité :  $G_1 \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Surface :  $A_1 = eh$

$$I_{G_1y}^{[1]} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{G_1z}^{[1]} = \frac{he^3}{12} \approx 0$$

Par application du théorème de Huygens :

$$I_{Gy}^{[1]} = \frac{eh^3}{12} + eh \times (0)^2 = \frac{eh^3}{12} = \frac{h^4}{120}$$

$$I_{Gz}^{[1]} = 0 + eh \times \left(-\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{eh^3}{4} = \frac{h^4}{40}$$

Aile 2 :

Centre de gravité :  $G_2 \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Surface :  $A_2 = eh$

$$I_{G_2y}^{[2]} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{G_2z}^{[2]} = \frac{he^3}{12} \approx 0$$

Par application du théorème de Huygens :

$$I_{Gy}^{[2]} = \frac{eh^3}{12} + eh \times (0)^2 = \frac{eh^3}{12} = \frac{h^4}{120}$$

$$I_{Gz}^{[2]} = 0 + eh \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{eh^3}{4} = \frac{h^4}{40}$$

Ame 3 :

Centre de gravité :  $G_2 \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{G_{yz}}$

Surface :  $A_2 = eh$

$$I_{G_{3y}}^{[3]} = \frac{he^3}{12} \approx 0$$

$$I_{G_{3z}}^{[2]} = \frac{eh^3}{12}$$

Or  $G_3 \equiv G$  donc

$$I_{G_y}^{[3]} \approx 0$$

$$I_{G_z}^{[2]} = \frac{eh^3}{12} = \frac{h^4}{120}$$

Or la section est la somme des 2 ailes et de l'âme, d'où

$$\begin{cases} I_{G_y} = \frac{h^4}{120} + 0 + \frac{h^4}{120} = \frac{h^4}{60} \\ I_{G_z} = \frac{h^4}{40} + \frac{h^4}{40} + \frac{h^4}{120} = \frac{7h^4}{120} \end{cases}$$

### Calcul des contraintes maximales

La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours :  $\sigma_x = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z$

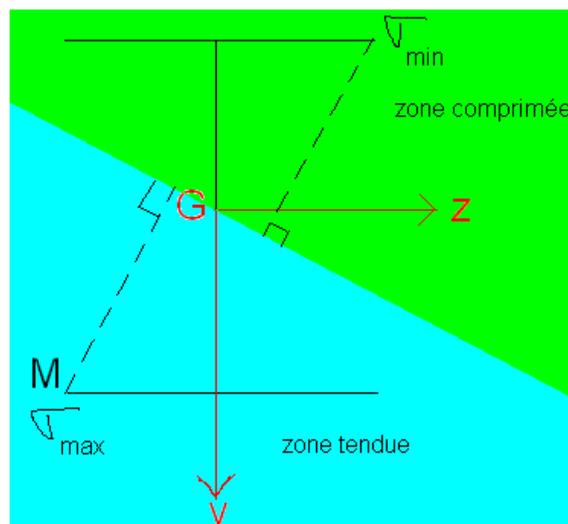
D'où, pour l'abscisse  $x = L/2$  (sections où les moments fléchissants sont maximaux), l'équation des contraintes est :

$$\sigma_x = \frac{120}{7h^4} \times \frac{qL^2 \cos \alpha}{8} \times y - \frac{60}{h^4} \times \frac{qL^2 \sin \alpha}{8} \times z$$

L'axe neutre a pour équation  $\sigma_x = 0$ , ainsi son équation est :

$$\frac{120}{7} \times \cos \alpha \times y - 60 \times \sin \alpha \times z = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{2} \times \tan \alpha \times z \approx 2,02 \times z$$



Le point dont la contrainte de traction est la plus importante est le point M de coordonnées

$$\begin{pmatrix} L/2 \\ h/2 \\ -h/2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la traction maximale est :

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{120}{7h^4} \times \frac{qL^2 \cos \alpha}{8} \times \frac{h}{2} - \frac{60}{h^4} \times \frac{qL^2 \sin \alpha}{8} \times \left(-\frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{xmax} = \frac{15qL^2}{h^3} \times \left( \frac{\sin \alpha}{4} + \frac{\cos \alpha}{14} \right)$$

Avec  $\bar{\sigma} = 200 \text{ MPa}$

La condition  $\sigma_{xmax} \leq \bar{\sigma}$  se traduit par  $h \geq \sqrt[3]{\frac{15qL^2}{\bar{\sigma}} \times \left( \frac{\sin \alpha}{4} + \frac{\cos \alpha}{14} \right)}$

L'application numérique est  $h \geq 0,152 \text{ m}$

2) **Condition «  $\sigma_{max} \leq 240 \text{ MPa}$  » sous le chargement « G + Q »**

Les calculs sont exactement les mêmes que précédemment, il suffit de remplacer « q » par « g+q » et de tenir compte de la nouvelle limite  $\bar{\sigma} = 240 \text{ MPa}$

Charge linéique à considérer

$$g = 25 \text{ kg/m}^2 \times 4 \text{ m} = 100 \text{ kg/m}$$

d'où la charge linéique totale est égale à :  $g + q = 1100 \text{ kg/m}$

Au final, l'application numérique est  $h \geq 0,148 \text{ m}$

3) **Bilan des 2 conditions**

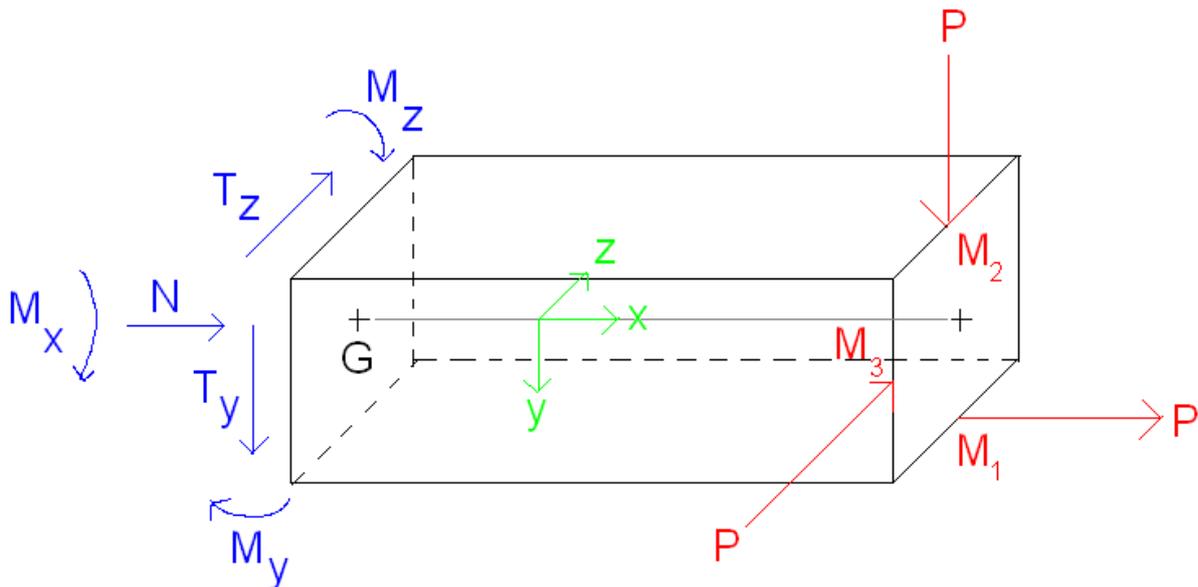
Tout profilé de hauteur supérieure à 15,2 cm convient.

## 6. Réponse exercice [ 6 ]

*Remarque* : il est inutile de connaître les réactions à l'appui puisqu'il suffit de conserver la partie droite de la poutre lors de la coupure pour connaître le torseur des sollicitations.

Calcul des sollicitations

La coupure en x (en conservant la partie droite de la poutre) est :



L'équilibre de la section est :

Effort normal :  $N = -P$

Effort tranchant :  $T_y = T_z = -P$

Moments fléchissant :  $\vec{M} + \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{P}_i = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L-x \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L-x \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ -a/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = P(L-x) \\ M_z = P(a+x-L) \end{cases}$$

Calcul des inerties

$$I_z = \frac{(2a)^3 \times a}{12} = \frac{2a^4}{3}$$

$$I_y = \frac{2a \times a^3}{12} = \frac{a^4}{6}$$

Calcul des contraintes

La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours :  $\sigma_x = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z$

D'où en remplaçant par les résultats précédents, l'équation des contraintes est :

$$\begin{aligned} \sigma_x(x; y; z) &= \frac{P}{2a^2} + \frac{P(a+x-L)}{\frac{2a^4}{3}}y - \frac{P(L-x)}{\frac{a^4}{6}}z \\ \Rightarrow \sigma_x(x; y; z) &= \frac{P}{2a^4} [a^2 + 3(a+x-L)y - 12(L-x)z] \end{aligned}$$

L'axe neutre a pour équation  $\sigma_x = 0$

**Section 1** :  $K = 0$

$$K = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 + 3(a-L)y - 12Lz &= 0 \\ \Rightarrow y &= \frac{12Lz}{3(a-L)} - \frac{a^2}{3(a-L)} \end{aligned}$$

En considérant que  $a \ll L$ , il vient que  $y \approx -4z + \frac{a^2}{3L}$

**Section 2** :  $K = 0,5$

$$K = 0,5 \Rightarrow x = L/2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 + 3\left(a - \frac{L}{2}\right)y - 12 - \frac{L}{2}z &= 0 \\ \Rightarrow y &= \frac{12Lz}{2 \times 3\left(a - \frac{L}{2}\right)} - \frac{a^2}{3\left(\frac{L}{2} - a\right)} \end{aligned}$$

En considérant que  $a \ll L$ , il vient que  $y \approx -4z + \frac{2a^2}{3L}$

**Section 3** :  $K = 1$

$$K = 1 \Rightarrow x = L$$

$$\Rightarrow a^2 + 3ay = 0$$

Il vient que  $y = \frac{-a}{3}$

**7. Réponse exercice [ 7 ]**

1a)  $p_w = \rho_w gh = 1000 \times 10 \times 50 = 500000 \text{ N/m}$

b)  $F_w = p_w \times \frac{h}{2} = 500000 \times \frac{50}{2} = 12500000 \text{ N} \equiv 12,5 \text{ MN}$

c)  $a = \frac{30}{2} - \frac{10}{2} = 10 \text{ m}$

$b = 10 + \frac{1}{3} \times 20 - \frac{30}{2} \approx 1,7 \text{ m}$

$$c = \frac{50}{3} \approx \boxed{16,7 \text{ m}}$$

$$2) F_1 = \rho_{\text{béton}} \times g \times 10 \times 50 \text{ et } F_2 = \rho_{\text{béton}} \times g \times \frac{20 \times 50}{2}$$

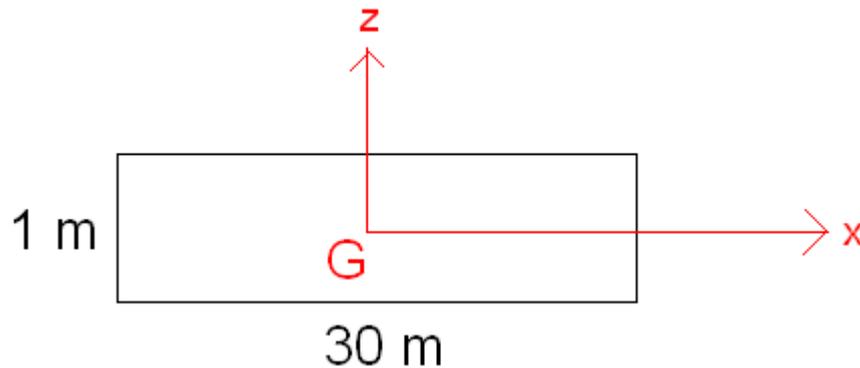
$$\text{Bilan : } \boxed{F_1 = F_2 = 12,5 \text{ MN}}$$

$$3) N = F_1 + F_2 = 12,5 + 12,5$$

$$M_z = c \times F_W + b \times F_2 - a \times F_1 = 16,7 \times 12,5 + 1,7 \times 12,5 - 10 \times 12,5$$

$$\text{Au final, le torseur qui s'applique à la base est : } \begin{cases} N = 25 \text{ MN} \\ M_z = 105 \text{ MN.m} \end{cases}$$

4) La section est :



$$\text{Surface : } \boxed{S = 30 \text{ m}^2} \text{ et l'inertie : } \boxed{I_z = \frac{1 \times 30^3}{12} = 2250 \text{ m}^4}$$

5) La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours :  $-\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} x$

Or les fibres supérieures et inférieures ont pour abscisses  $x = -15 \text{ m}$  et  $x = 15 \text{ m}$ .

Ainsi les contraintes minimales et maximales sont :

$$\begin{cases} \sigma_{max} = -\frac{25}{30} + \frac{105}{2250} \times 15 = -0,13 \text{ MPa} \\ \sigma_{min} = -\frac{25}{30} + \frac{105}{2250} \times (-15) = -1,53 \text{ MPa} \end{cases}$$

6) Les contraintes maximales et minimales sont négatives, signifiant que la base est totalement comprimée.

Ainsi le barrage est correctement dimensionné.

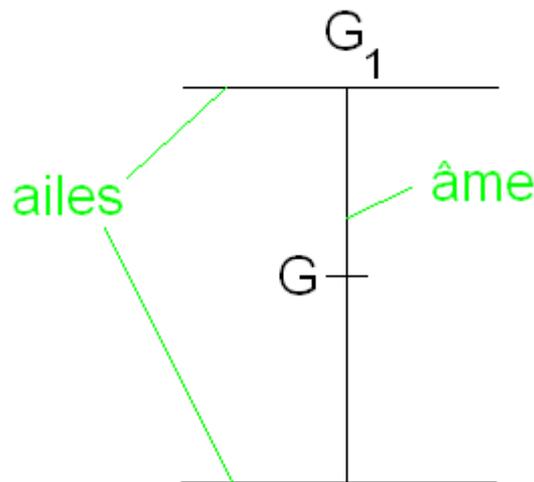
## 8. Réponse exercice [ 8 ]

1) Aire de la section :  $A = 0,5 \times 10 \times 2 + 0,5 \times 9 = 14,5 \text{ cm}^2$

Poids propre :  $g = 7850 \times 14,5 \cdot 10^{-4} = 11,4 \text{ kg/m} \equiv 114 \text{ N/m}$

Moment fléchissant maximal :  $M_{zmax} = \frac{gl^2}{8} = \frac{114 \times 30^2}{8} = 12825 \text{ N.m}$

Inertie :



$$I_{Gz}^{\text{aile}} = \frac{10 \times 0,5^3}{12} + 10 \times 0,5 \times 4,75^2 = 113 \text{ cm}^4$$

$$I_{Gz}^{\text{âme}} = \frac{0,5 \times 9^3}{12} = 30 \text{ cm}^4$$

La section est composée d'une âme et deux ailes, ainsi l'inertie totale est égale à :

$$I_{Gz} = I_{Gz}^{\text{âme}} + 2 \times I_{Gz}^{\text{aile}} = 256 \text{ cm}^4$$

Calcul des contraintes :

La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours :  $\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

Donc la contrainte maximale est égale à :  $\sigma = \frac{12825 \times 10^{-6}}{256 \times 10^{-8}} \times 0,05 = 250 \text{ MPa} > \bar{\sigma}$

Bilan :

La poutre devrait casser (ou probablement plastifiée) sous son poids propre si la proposition du grutier est acceptée.

2) En analysant le problème à l'envers, il est possible de déterminer la portée maximale que la poutre peut supporter sous son poids propre.

Moment fléchissant maximal :

$$\bar{\sigma} = \frac{M_{zmax}}{I_z} \times \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow M_{zmax} = \frac{2 \times I_z \times \bar{\sigma}}{h} = \frac{2 \times 256 \times 10^{-8} \times 240 \times 10^6}{0,1} = 12288 \text{ N.m}$$

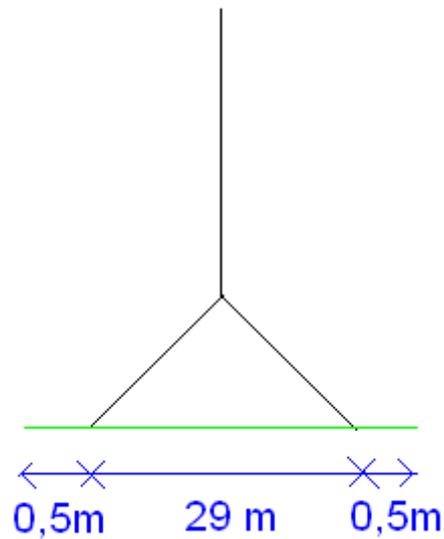
Portée maximale :

Le moment maximal est déterminé par :  $M_{zmax} = \frac{g l_{max}^2}{8}$

$$D'où l_{max} = \sqrt{\frac{8 \times M_{zmax}}{g}} = \sqrt{\frac{8 \times 12288}{114}} = 29,4 \text{ m}$$

Proposition :

Une proposition peut être de réduire la portée à 29 m selon le schéma suivant



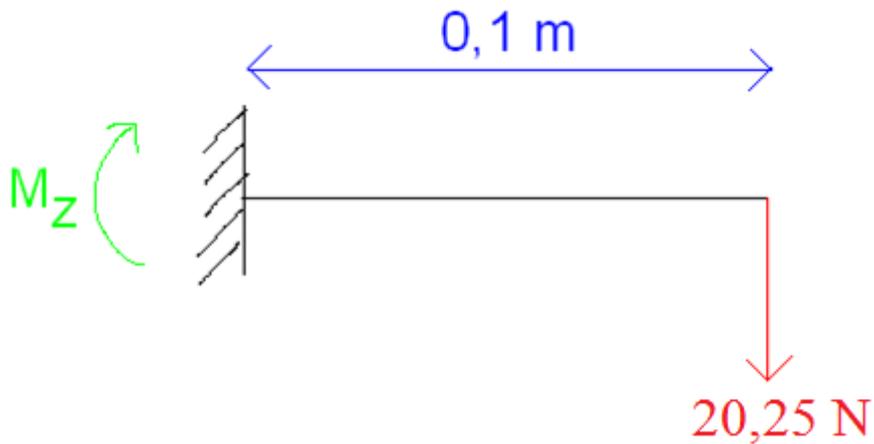
## 9. Réponse exercice [ 9 ]

1) Poids repris par la fixation :

La fixation centrale est la plus sollicitée et reprend la moitié du poids du rideau.

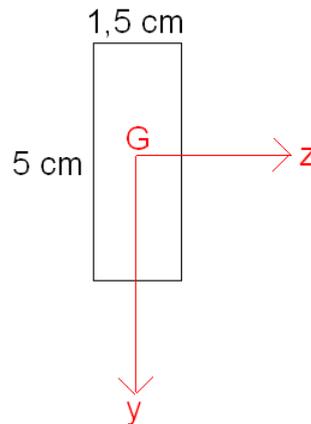
$$P = \frac{3 \times 3 \times 0,450}{2} \times 10 = 20,25 \text{ N}$$

Moment fléchissant repris par la surface collée :



$$M_z = 20,25 \times 0,1 = 2,03 \text{ N.m}$$

Inertie de la surface collée :



$$I_z = \frac{1,5 \times 5^3}{12} = 15,6 \text{ cm}^4$$

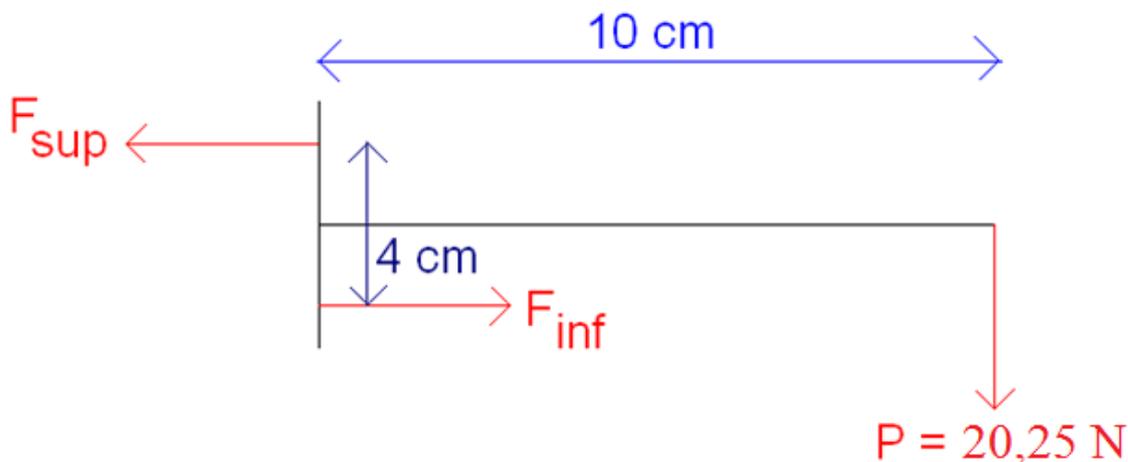
**Contrainte maximale :**

La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours :  $\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

$$\sigma_{max} = \frac{2,03 \cdot 10^{-6}}{15,6 \cdot 10^{-8}} \times 0,025 = 0,33 \text{ MPa}$$

**Conclusion :** La résistance maximale de la colle est de 100 kg/m<sup>2</sup>, soit 0,001 MPa, ce qui est très largement inférieur à  $\sigma_{max}$ . Donc la résistance de la colle ne permet pas de fixer le rideau.

2)



**Equilibre de la section collée :**

Somme des forces horizontales nulle  $\Rightarrow F_{sup} = F_{inf}$

*Nota :* pour la suite, notons  $F_{sup} = F_{inf} = F$

*Remarque :* il existe également une force verticale de cisaillement permettant l'équilibre de la section collée puisque la somme des forces verticales doit être également nulle. Néanmoins, la résistance au cisaillement des vis ne fait pas l'objet de cet exercice.

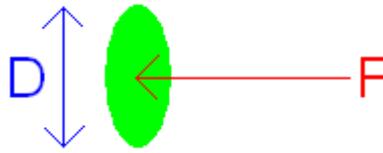
Moment global en G nul :

$$2 \text{ cm} \times F_{sup} + 2 \text{ cm} \times F_{inf} - 10 \text{ cm} \times P = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{10}{4} P = 50,6 \text{ N}$$

Contrainte dans les vis :

La force reprise par les vis est F, donc la contrainte dans celle-ci est :  $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi D^2}$



Diamètre minimal de la vis :

La résistance de la vis implique :  $\sigma \leq \bar{\sigma}$

$$\text{donc } \frac{4F}{\pi D^2} \leq \bar{\sigma}$$

$$\text{et au final } D \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \bar{\sigma}}}$$

L'application numérique est :  $D \geq 0,90 \text{ mm}$

Toutes vis de diamètre supérieures ou égales à 0,90 mm conviennent à la fixation du rideau.

## 10. Réponse exercice [ 10 ]

Le moment d'inertie pour un disque de diamètre D est égal à :

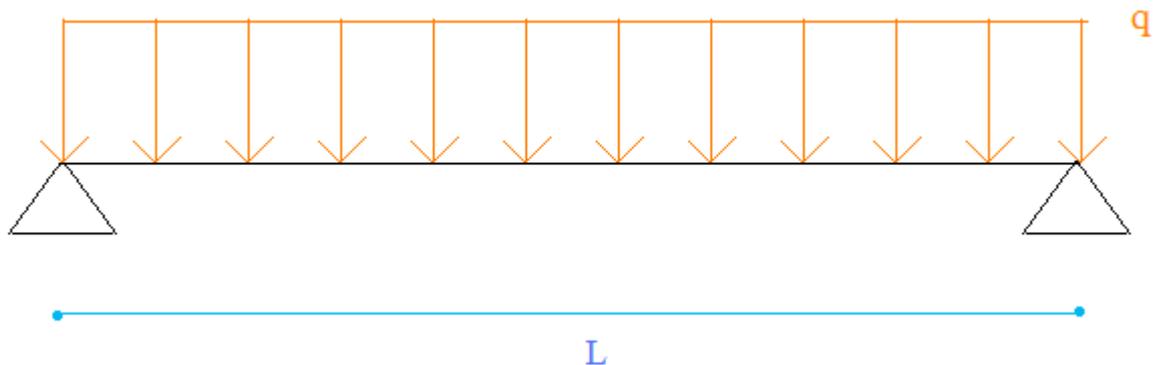
$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

Or le diamètre dépend de l'abscisse et vaut :

$$D(x) = 0,3 + 0,06x$$

Ainsi

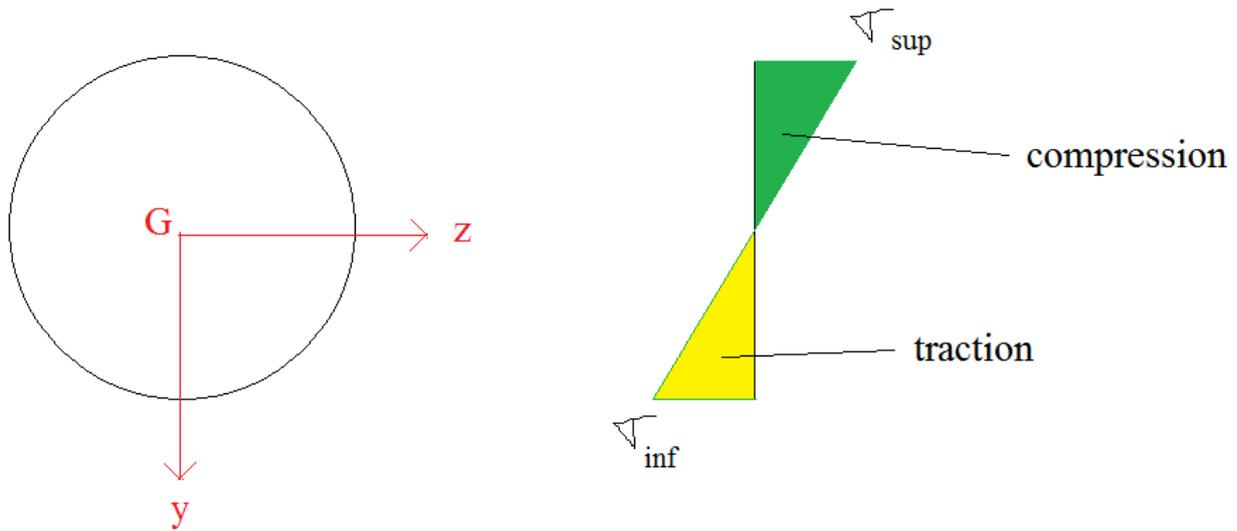
$$I_z(x) = \frac{\pi [0,3 + 0,06x]^4}{64}$$



Le moment fléchissant est égal à :

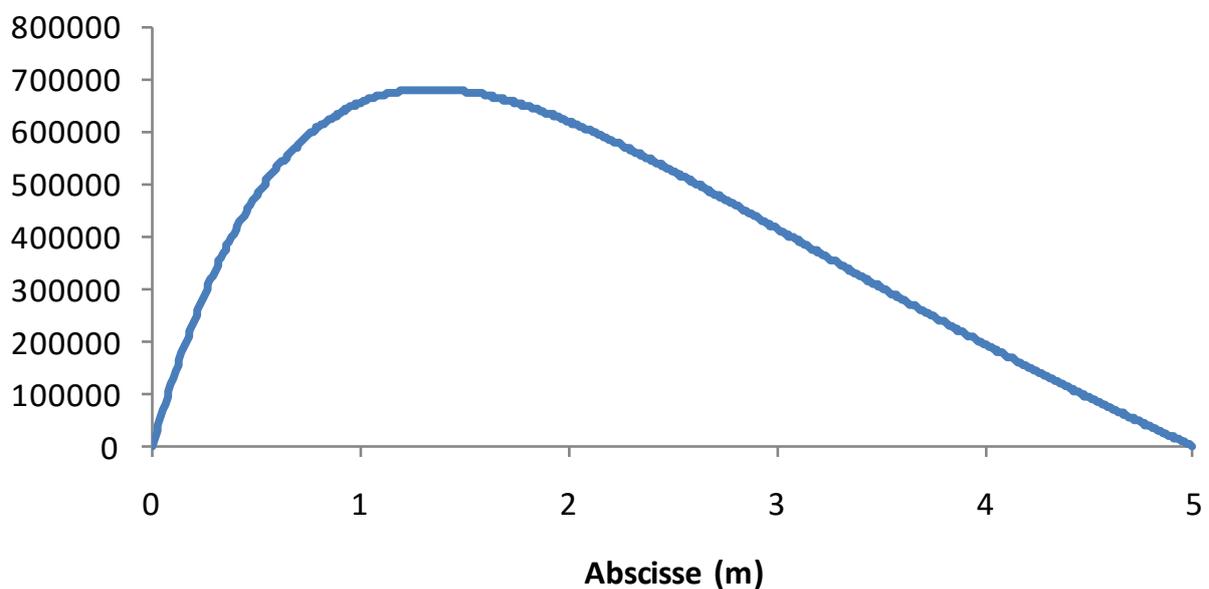
$$M_z(x) = \frac{qx(L-x)}{2} = \frac{1500 \times x \times (5-x)}{2}$$

La contrainte maximale est calculée pour la fibre inférieure



$$\sigma_{inf}(x) = \frac{M_z(x)}{I_z(x)} \times \frac{D(x)}{2} = \frac{1500 \times x \times (5 - x) \times 64}{4 \times \pi \times (0,3 + 0,06x)^3}$$

## contrainte de la fibre inférieure (Pa)



La contrainte est maximale pour une abscisse de 1,34 m et vaut 0,68 MPa.

## 11. Réponse exercice [ 11 ]

### Moments d'inertie et surface

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \text{ et } I_z = \frac{bh^3}{12} \text{ et } S = bh$$

### Equation de l'ECI

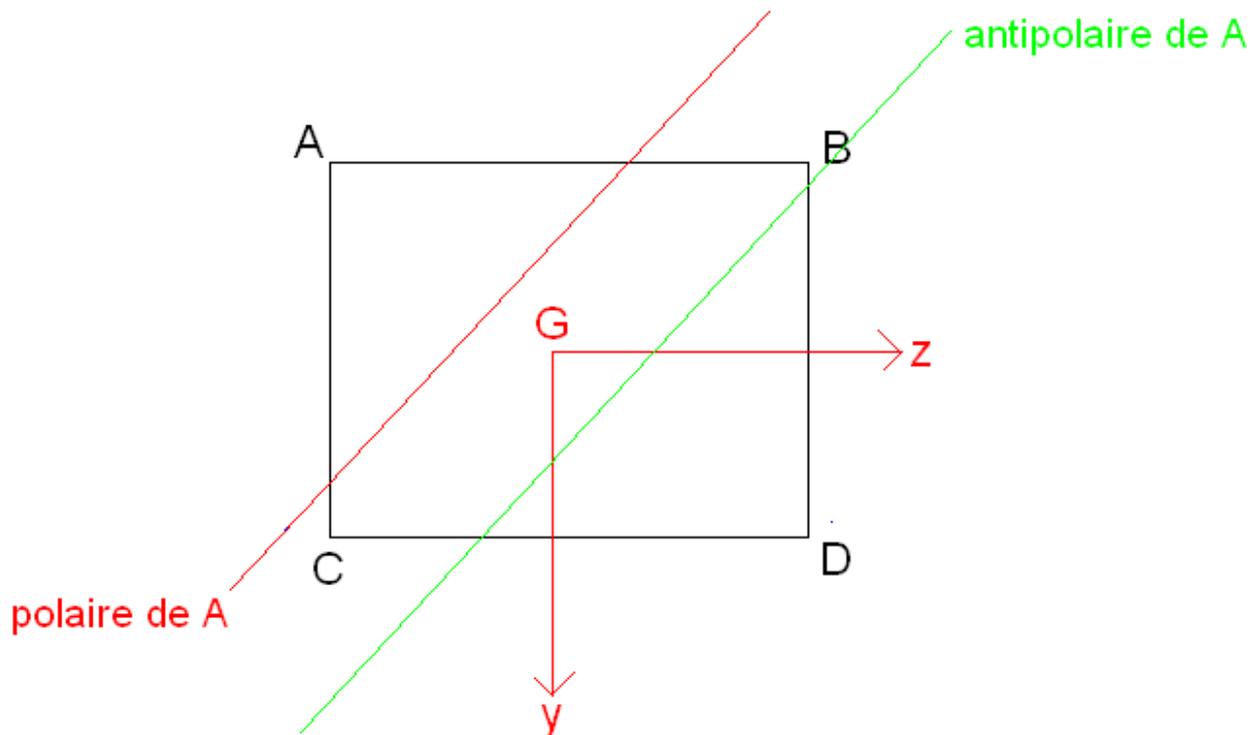
$$\frac{y^2}{I_z} + \frac{z^2}{I_y} = \frac{1}{S}$$

### Polaire de A

$$\frac{12yy_A}{bh^3} + \frac{12zz_A}{hb^3} = \frac{1}{bh}$$

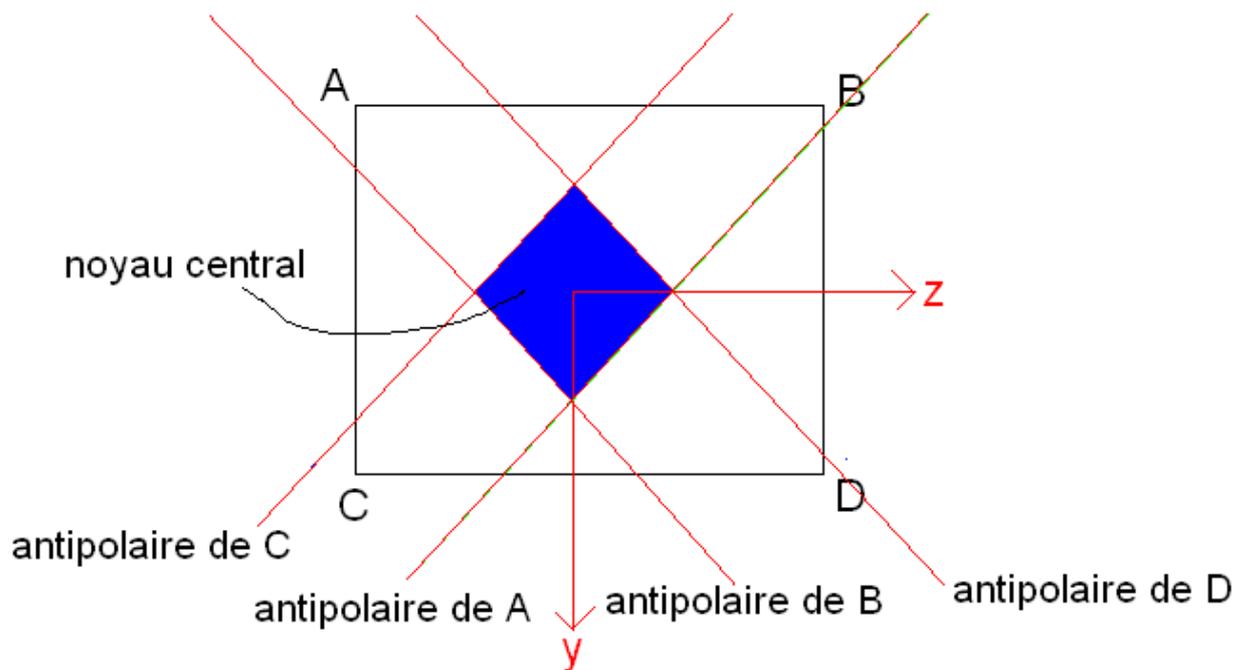
$$\text{Or } y_A = \frac{-h}{2} \text{ et } z_A = \frac{-b}{2}$$

Donc l'équation de la polaire de A est :  $-\frac{6y}{h} - \frac{6z}{b} = 1$



En remarquant que

- la polaire de A est l'antipolaire de C,
- les antipolaires de B et de D peuvent être obtenus par symétrie du problème.



## 12. Réponse exercice [ 12 ]

Position du centre de gravité

$$y_G = \frac{h}{4}$$

Moments d'inertie

$$I_{Gy} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{5eh^3}{24}$$

ECI

$$\frac{48y^2}{5h^2} + \frac{24z^2}{h^2} = 1$$

Coordonnées des points du contour

$$A \begin{pmatrix} -h/4 \\ -h/2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -h/4 \\ h/2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 3h/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Polaire de A

$$\frac{48y}{5h^2} \times \frac{-h}{4} + \frac{24z}{h^2} \times \frac{-h}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-12y}{5h} - \frac{12z}{h} = 1$$

Polaire de B

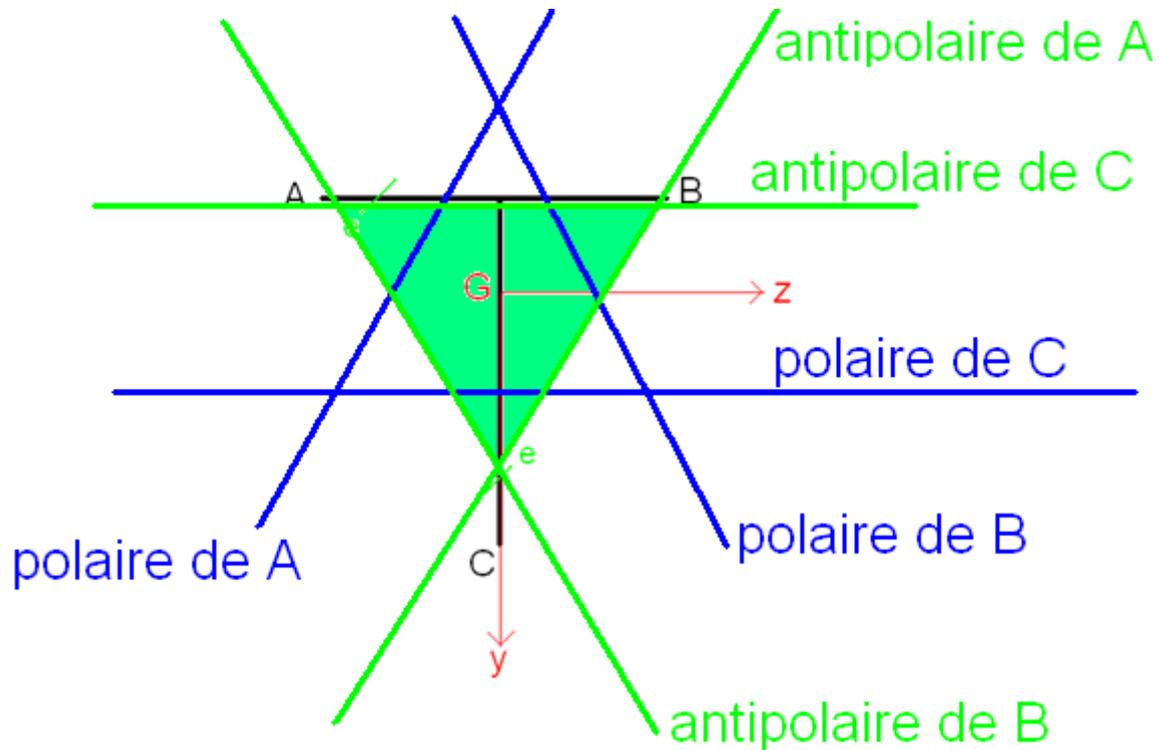
La polaire de B est la symétrique de la polaire de A par rapport à l'axe  $\vec{y}$ .

Polaire de C

$$\frac{48y}{5h^2} \times \frac{3h}{4} + \frac{24z}{h^2} \times 0 = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{5h}{36}$$

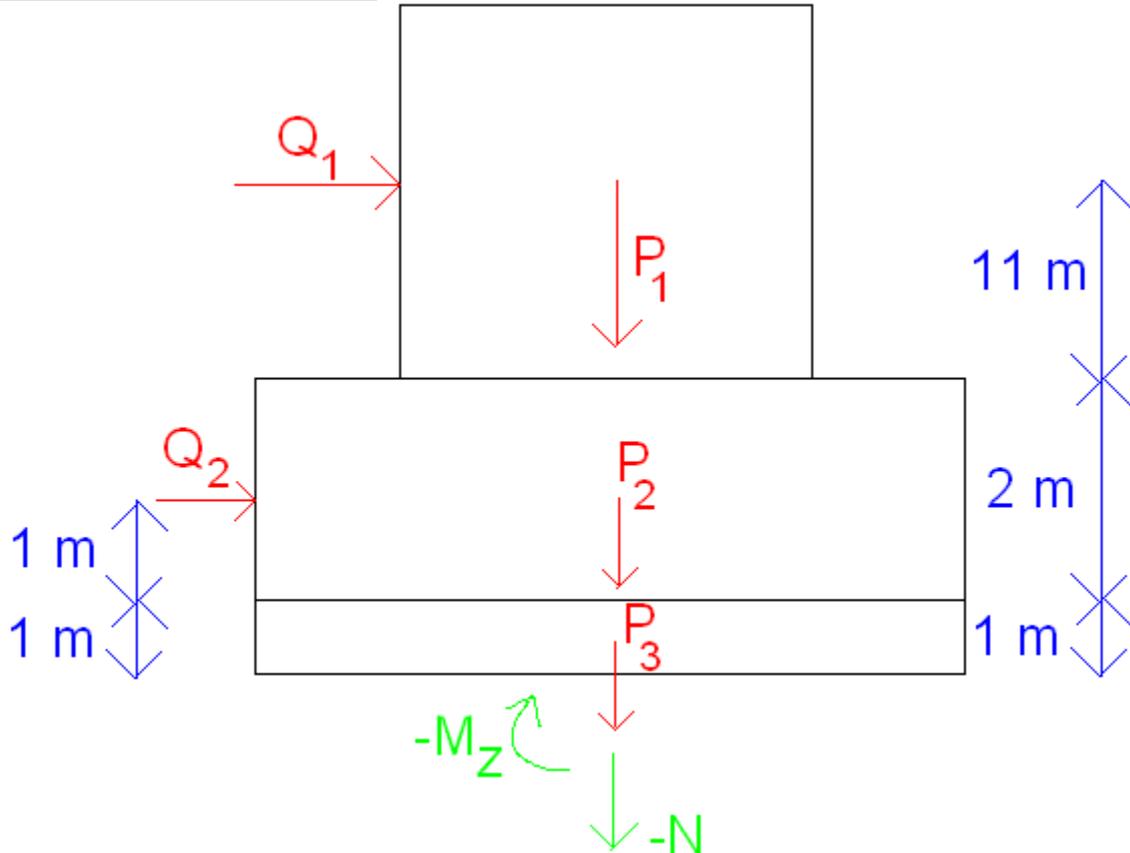
Noyau central



Nota : le schéma précédent n'est évidemment pas à l'échelle... (comme de nombreux autres de ce document).

### 13. Réponse exercice [ 13 ]

1) Calcul des forces élémentaires :



$$P_1 = 4800000 \text{ N} = 4800 \text{ kN}$$

$$P_2 = 1200 \text{ kN}$$

$$P_3 = \frac{\pi \times 6,7^2}{4} \times 2300 \times 10 \times 10^{-3} = 811 \text{ kN}$$

$$Q_1 = \frac{2}{3} \times 200 \times 6,5 \times 22 = 19066 \text{ kg} \equiv 191 \text{ kN}$$

$$Q_2 = \frac{2}{3} \times 200 \times 6,7 \times 2 = 1733 \text{ kg} \equiv 17 \text{ kN}$$

Calcul du torseur :

Effort normal :  $N = P_1 + P_2 + P_3 = 6811 \text{ kN}$

Moment fléchissant :  $M_z = 2 \times Q_2 + Q_1 \times (3 + 11) = 2708 \text{ kN.m}$

Centre de pression :

D'après le cours, le centre de pression se situe à  $y_c = \frac{-M_z}{N} = \frac{-2708}{6811} = -0,4 \text{ m} \equiv \boxed{-40 \text{ cm}}$

2) Caractéristiques de la section :

Calcul des inerties :  $I_y = I_z = \frac{\pi \phi^4}{64} = \frac{\pi \times 6,7^4}{64} = 98,9 \text{ m}^4$

Surface de la section :  $S = \frac{\pi \phi^2}{4} = \frac{\pi \times 6,7^2}{4} = 35,3 \text{ m}^2$

Calcul de l'axe neutre et répartition des contraintes :

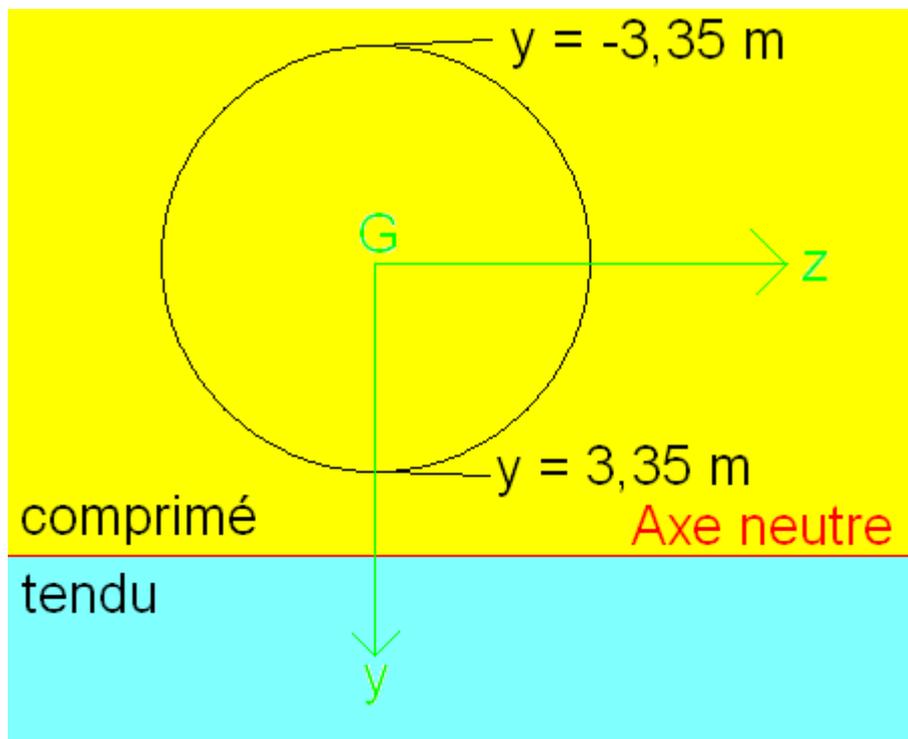
La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours :  $\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

Or d'après le cours, l'axe neutre est la droite d'équation  $\sigma = 0$

Donc l'équation de la droite vérifie :  $-\frac{6811}{35,3} + \frac{2708}{98,9}y = 0$

Et finalement  $y = 7,05 \text{ m}$ .

La répartition des contraintes est :



Nota : l'axe neutre est à 7,05 m de l'axe z, le schéma précédent n'est donc pas à l'échelle.

La contrainte minimale est pour l'abscisse  $y = -3,35 \text{ m}$

$$\text{soit } \sigma_{min} = -\frac{6811}{35,3} + \frac{2708}{98,9} \times (-3,35) = -280 \text{ kPa} \equiv -0,28 \text{ MPa}$$

La contrainte maximale est pour l'abscisse  $y = 3,35 \text{ m}$

$$\text{soit } \sigma_{max} = -\frac{6811}{35,3} + \frac{2708}{98,9} \times (+3,35) = -100 \text{ kPa} \equiv -0,10 \text{ MPa}$$

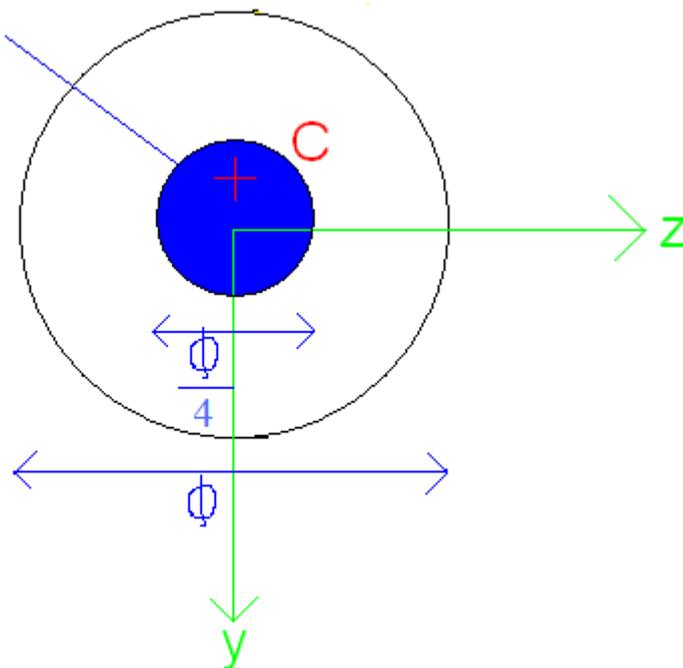
3) 3 justifications possibles (les deux premières s'appuyant sur les résultats des questions 1 et 2, et la troisième uniquement sur la question 1) :

1- l'axe neutre ne passe pas par la section est l'effort normal N est supérieur à 0, donc la section est entièrement comprimée.

2- Les contraintes minimale et maximale sont toutes les deux négatives (traduisant une compression), donc la section est entièrement comprimée

3 - Le noyau central de la section circulaire est :

noyau central



Avec C le centre de pression dont l'ordonnée  $y_c$  a été calculée à la question 1) et vaut -40 cm.  
Le centre de pression C appartient au noyau central, donc la section est soit entièrement tendue, soit entièrement comprimée.  
Or l'effort normal appliqué N est positif, donc la section est entièrement comprimée.

*Remarque* : ces 3 justifications sont équivalentes, néanmoins, la 3<sup>ème</sup> utilisant le noyau central est très largement celle qui permettrait de conclure l'exercice le plus rapidement puisque la question 2 devient inutile... Donc ne pas oublier l'outil « Noyau central » dans la résolution de ce type de problème (savoir si la section est entièrement comprimée, entièrement tendue ou partiellement tendue). L'utilisation ne permet, néanmoins, pas de connaître la valeur des contraintes dans le matériau.

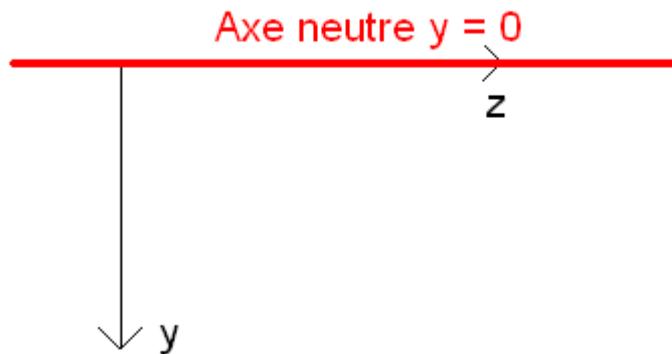
## 14. Réponse exercice [ 14 ]

Cas 1 : Flexion simple autour de l'axe z

Le torseur des sollicitations est sous la forme : 
$$\begin{cases} N = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases}$$

L'équation des contraintes s'écrit alors :  $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$

L'équation de l'axe neutre (A.N.) est  $y = 0$  et sa représentation est :

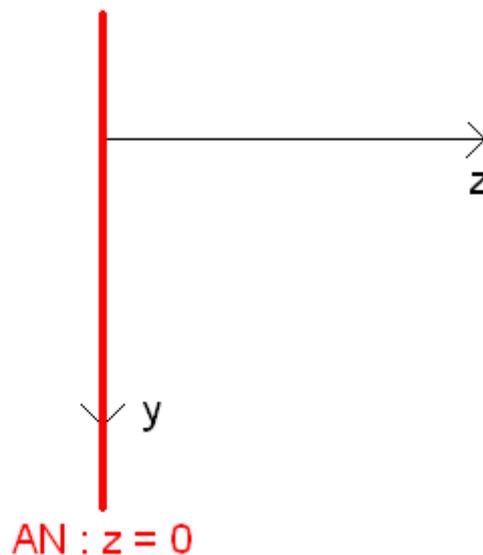


Cas 2 : Flexion simple autour de l'axe y

Le torseur des sollicitations est sous la forme : 
$$\begin{cases} N = 0 \\ M_y \neq 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

L'équation des contraintes s'écrit alors :  $\sigma = \frac{-M_y}{I_y} z$

L'équation de l'axe neutre (A.N.) est  $z = 0$  et sa représentation est :

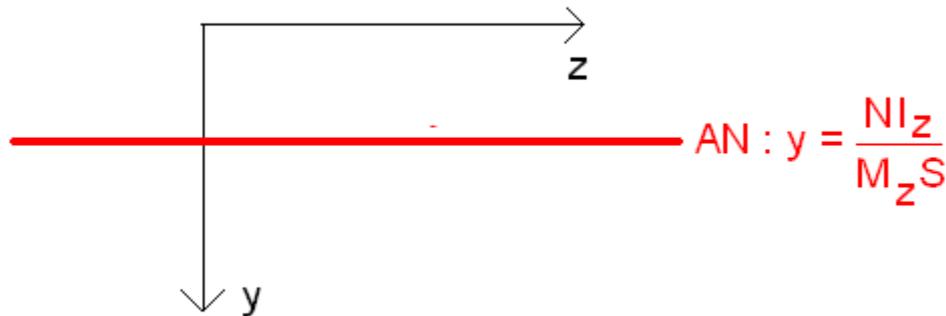


Cas 3 : Flexion composée autour de l'axe z

Le torseur des sollicitations est sous la forme : 
$$\begin{cases} N \neq 0 \\ M_y = 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases}$$

L'équation des contraintes s'écrit alors :  $\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

L'équation de l'axe neutre (A.N.) est  $y = \frac{N \times I_z}{M_z \times S}$  et sa représentation est :

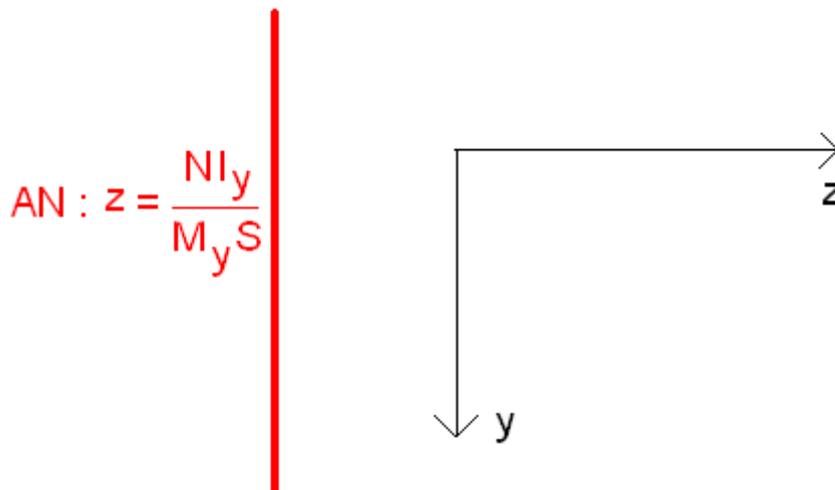


Cas 4 : Flexion composée autour de l'axe y

Le torseur des sollicitations est sous la forme : 
$$\begin{cases} N \neq 0 \\ M_y \neq 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

L'équation des contraintes s'écrit alors :  $\sigma = -\frac{N}{S} - \frac{M_y}{I_y} z$

L'équation de l'axe neutre (A.N.) est  $z = -\frac{N \times I_y}{M_y \times S}$  et sa représentation est :

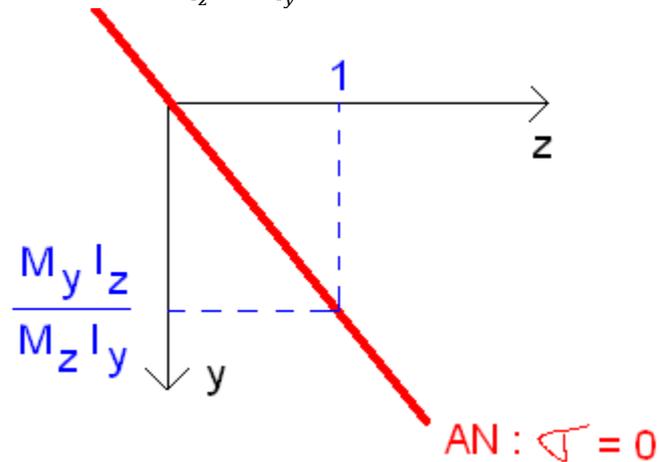


Cas 5 : Flexion déviée simple

Le torseur des sollicitations est sous la forme : 
$$\begin{cases} N = 0 \\ M_y \neq 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases}$$

L'équation des contraintes s'écrit alors :  $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$

L'équation de l'axe neutre (A.N.) est  $\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0$  et sa représentation est :



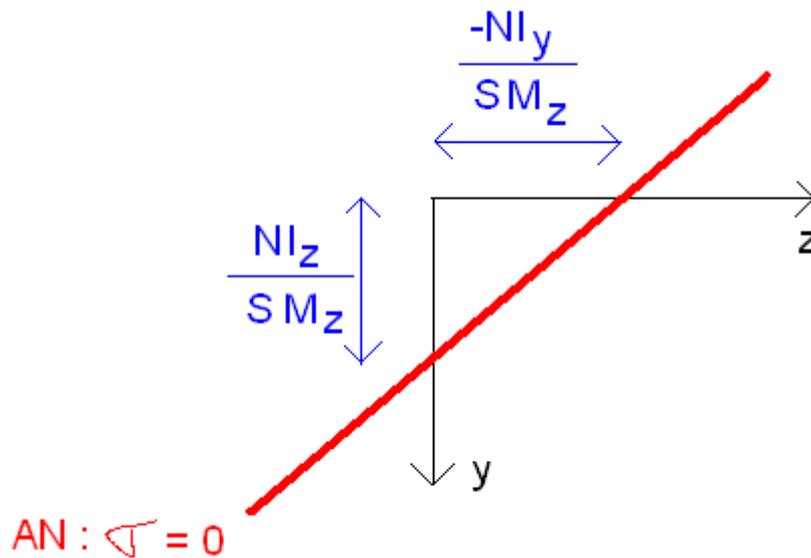
Cas 6 : Flexion déviée composée

Le torseur des sollicitations est sous la forme :

$$\begin{cases} N \neq 0 \\ M_y \neq 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases}$$

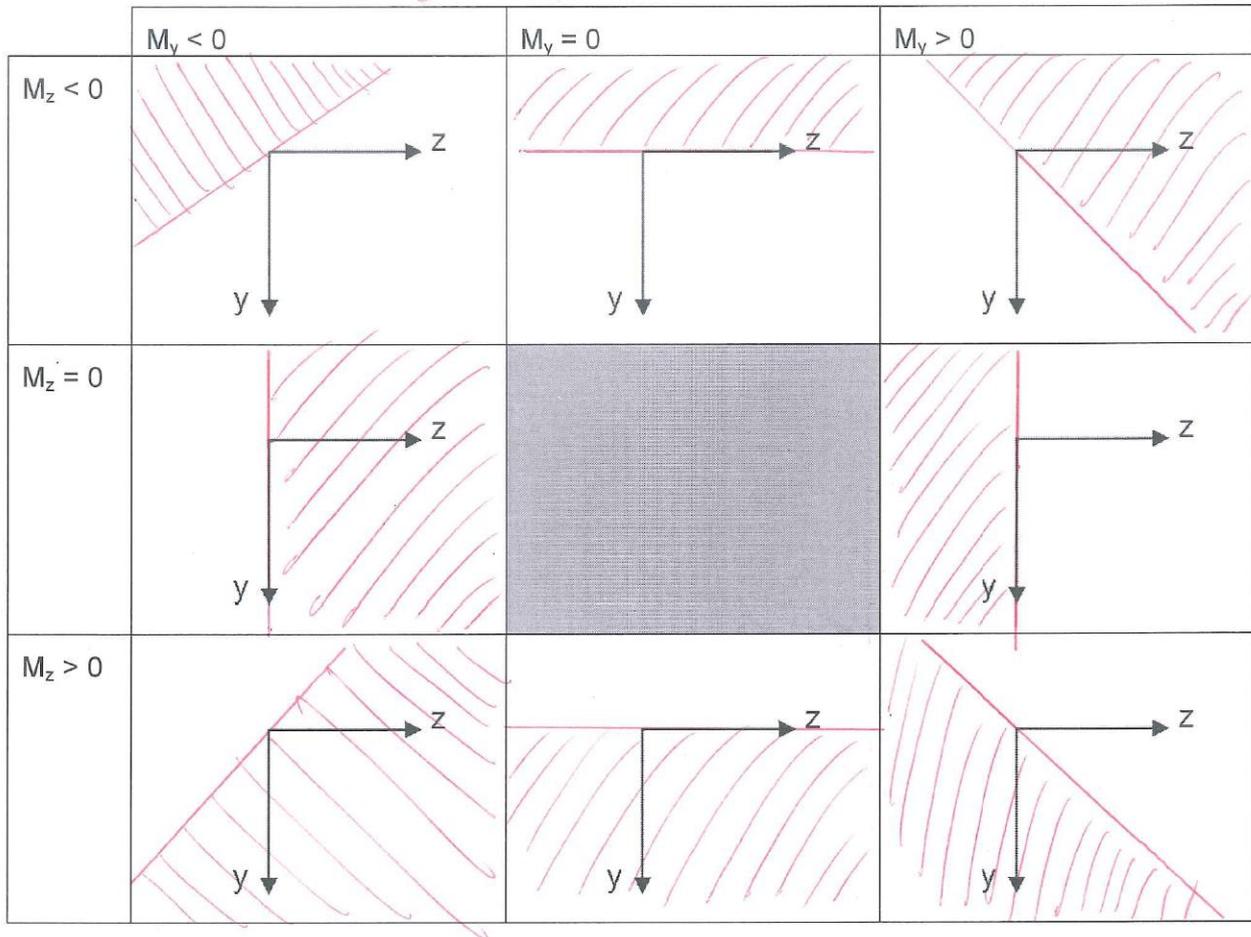
L'équation des contraintes s'écrit alors :  $\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$

L'équation de l'axe neutre (A.N.) est  $-\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0$  et sa représentation est :

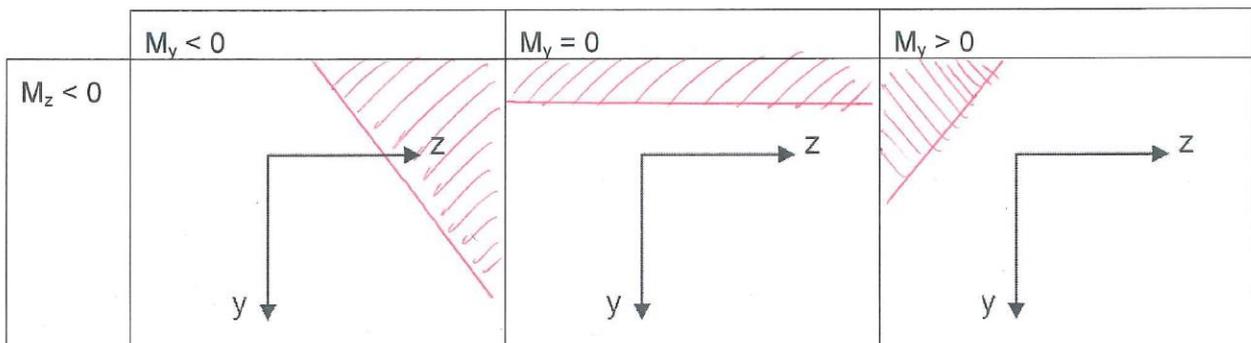


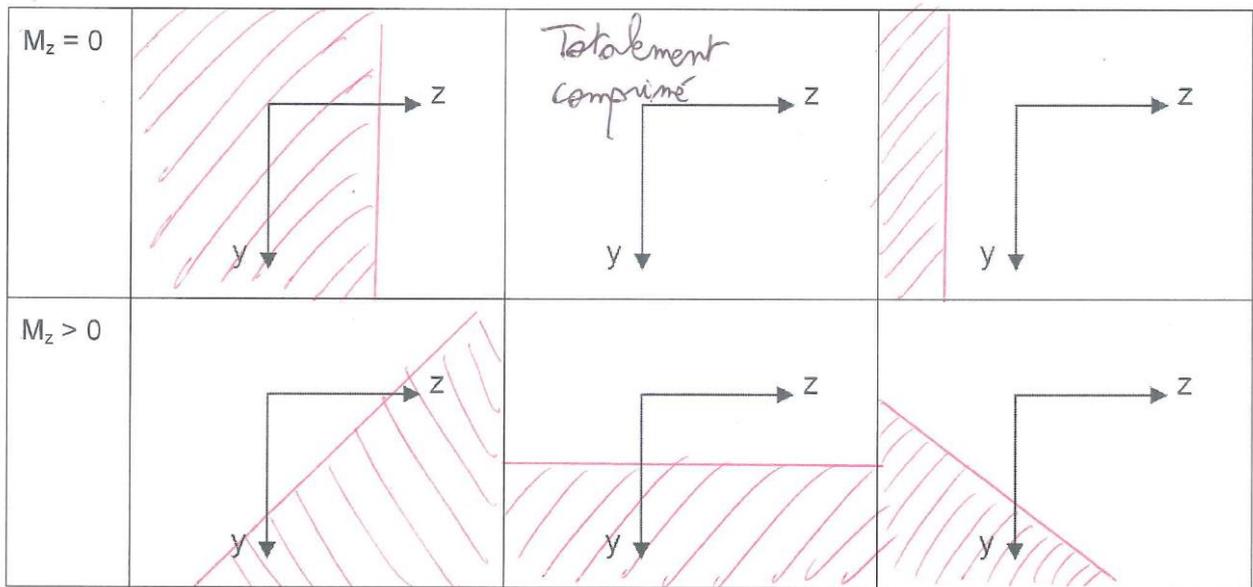
1)  $N = 0$

 = zone tendue

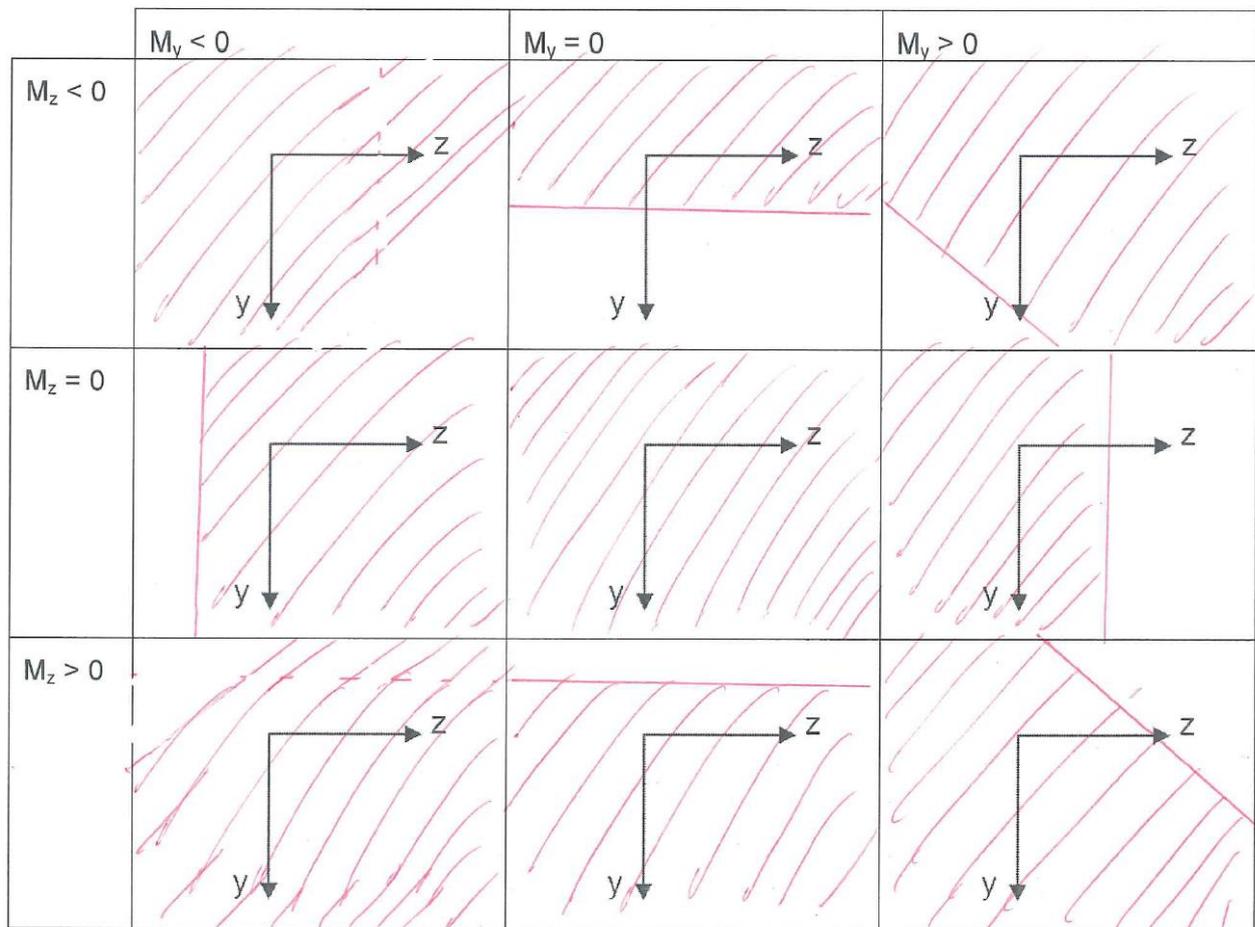


2)  $N > 0$



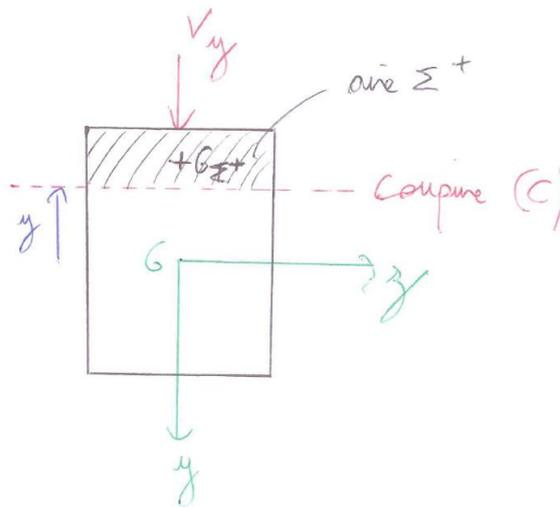


1)  $N < 0$



## 15. Réponse exercice [ 15 ]

### Calcul du moment statique



L'ordonnée du centre de gravité  $G_{\Sigma^+}$  de la surface  $\Sigma^+$  est  $y_{G_{\Sigma^+}} = \frac{1}{2} \left( y - \frac{h}{2} \right)$

L'aire de la surface  $\Sigma^+$  est  $A_{\Sigma^+} = b \times \left( y + \frac{h}{2} \right)$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface  $\Sigma^+$  est égale à :

$$S_z(\Sigma^+) = y_{G_{\Sigma^+}} \times A_{\Sigma^+}$$

D'où

$$S_z(\Sigma^+) = \frac{1}{2} \left( y - \frac{h}{2} \right) \times b \times \left( y + \frac{h}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( y^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right)$$

### Equation de contrainte du cisaillement

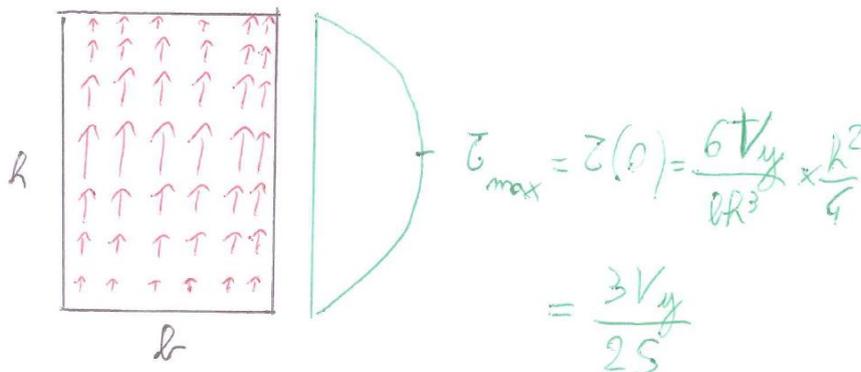
D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_y = -\frac{V_y}{I_z} \times \frac{S_z(\Sigma^+)}{b}$

Or l'inertie de la section est  $I_z = \frac{bh^3}{12}$

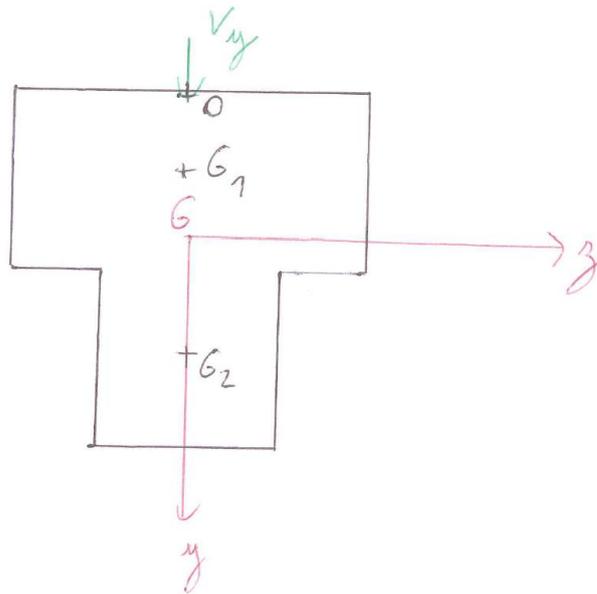
Donc  $\tau_y = -\frac{12V_y}{bh^3} \times \frac{\frac{b}{2} \left( y^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right)}{b} \Rightarrow \tau_y = \frac{6V_y}{bh^3} \times \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right)$

$$\Rightarrow \tau_y = \frac{6V_y}{bh^3} \times \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Répartition du cisaillement :



## 16. Réponse exercice [ 16 ]



### Position du centre de gravité G

La section est la somme du rectangle supérieur de largeur  $b$  et de hauteur  $h/2$  (rectangle 1) et du rectangle inférieur de largeur  $b/2$  et de hauteur  $h/2$  (rectangle 2).

#### *Rectangle 1 :*

La position du centre de gravité du rectangle 1 est  $\overline{OG_1} = \frac{h}{4}$

La surface du rectangle 1 est :  $A_1 = \frac{bh}{2}$

#### *Rectangle 2 :*

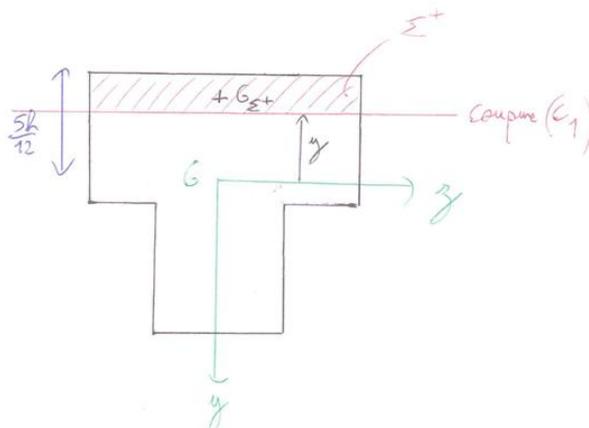
La position du centre de gravité du rectangle 2 est  $\overline{OG_2} = \frac{3h}{4}$

La surface du rectangle 2 est :  $A_2 = \frac{bh}{4}$

Au final, la position du centre de gravité de la section est

$$\overline{OG} = \frac{\overline{OG_1} \times A_1 + \overline{OG_2} \times A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{h}{4} \times \frac{bh}{2} + \frac{3h}{4} \times \frac{bh}{4}}{\frac{bh}{2} + \frac{bh}{4}} = \frac{5h}{12}$$

### Coupure 1 (coupant le rectangle 1)



Calcul du moment statique

L'ordonnée du centre de gravité  $G_{\Sigma^+}$  de la surface  $\Sigma^+$  est  $y_{G_{\Sigma^+}} = \frac{1}{2} \left( y - \frac{5h}{12} \right)$

L'aire de la surface  $\Sigma^+$  est  $A_{\Sigma^+} = b \times \left( y + \frac{5h}{12} \right)$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface  $\Sigma^+$  est égale à :

$$S_z(\Sigma^+) = y_{G_{\Sigma^+}} \times A_{\Sigma^+}$$

D'où

$$S_z(\Sigma^+) = \frac{1}{2} \left( y - \frac{5h}{12} \right) \times b \times \left( y + \frac{5h}{12} \right) = \frac{b}{2} \left( y^2 - \frac{25h^2}{144} \right)$$

*Equation de contrainte du cisaillement*

D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_y = -\frac{V_y}{I_z} \times \frac{S_z(\Sigma^+)}{b}$

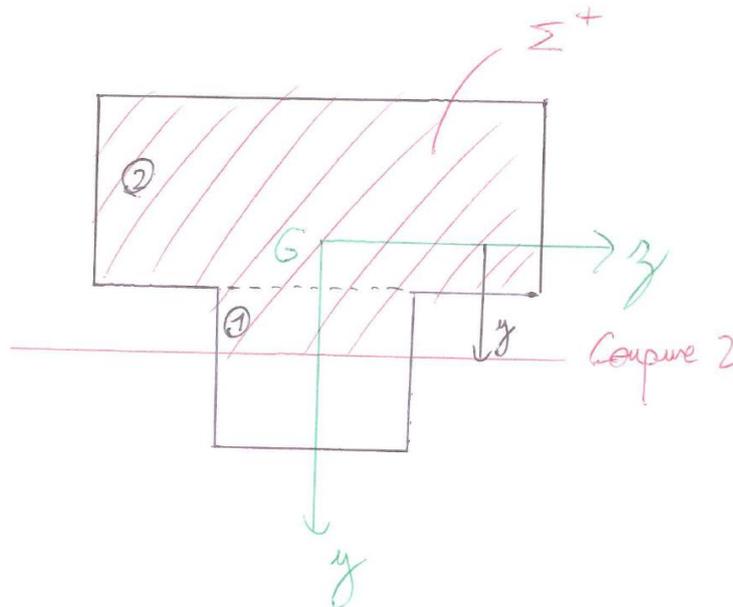
$$\Rightarrow \tau_y = \frac{V_y}{2I_z} \times \left( \frac{25h^2}{144} - y^2 \right)$$

**Coupure 2** (coupant le rectangle 2)

On décomposera la surface  $\Sigma^+$  en deux :

Surface **2** : rectangle 1

Surface **1** : la surface  $\Sigma^+$  à laquelle on soustrait le rectangle 1



**Surface 2**

*Calcul du moment statique*

L'ordonnée du centre de gravité  $G_{\Sigma^+_2}$  de la surface  $\Sigma^+_2$  est  $y_{G_{\Sigma^+_2}} = -\frac{5h}{12} + \frac{h}{4} = -\frac{h}{6}$

L'aire de la surface  $\Sigma^+_2$  est  $A_{\Sigma^+_2} = \frac{bh}{2}$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface  $\Sigma^+_2$  est égale à :

$$S_z(\Sigma^+_2) = y_{G_{\Sigma^+_2}} \times A_{\Sigma^+_2}$$

D'où

$$S_z(\Sigma^+_2) = -\frac{h}{6} \times \frac{bh}{2} = -\frac{bh^2}{12}$$

**Surface 1**

*Calcul du moment statique*

L'ordonnée du centre de gravité  $G_{\Sigma^+_1}$  de la surface  $\Sigma^+_1$  est  $y_{G_{\Sigma^+_1}} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{h}{12} + y \right)$

L'aire de la surface  $\Sigma^+_1$  est  $A_{\Sigma^+_1} = \frac{b}{2} \times \left( y - \frac{h}{12} \right)$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface  $\Sigma^+_1$  est égale à :

$$S_z(\Sigma^+_1) = y_{G_{\Sigma^+_1}} \times A_{\Sigma^+_1}$$

D'où

$$S_z(\Sigma^+_1) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{h}{12} + y \right) \times \frac{b}{2} \times \left( y - \frac{h}{12} \right) = \frac{b}{4} \times \left( y^2 - \frac{h^2}{144} \right)$$

**Moment statique de la section :**

La surface  $\Sigma^+$  est la somme de la surface  $\Sigma^+_1$  et de la surface  $\Sigma^+_2$  donc le moment statique est égale

$$\text{à : } S_z(\Sigma^+) = S_z(\Sigma^+_1) + S_z(\Sigma^+_2) = -\frac{bh^2}{12} + \frac{b}{4} \times \left( y^2 - \frac{h^2}{144} \right) = \frac{by^2}{4} - \frac{49bh^2}{576}$$

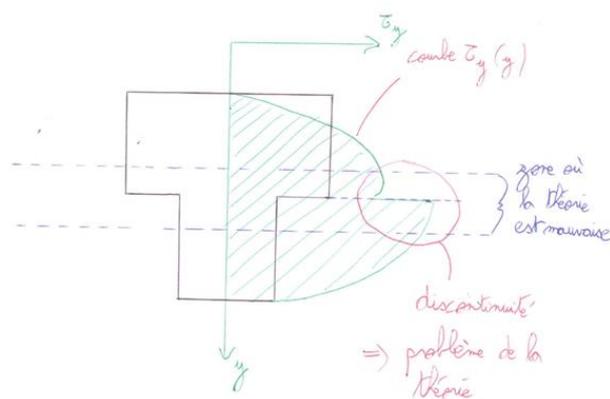
*Equation de contrainte du cisaillement*

D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_y = -\frac{V_y}{I_z} \times \frac{S_z(\Sigma^+)}{b(y)}$

**ATTENTION :** pour la coupure 2, la largeur  $b(y)$  est égale à  $b/2$  !!!

$$\begin{aligned} \tau_y &= -\frac{V_y}{I_z} \times \frac{S_z(\Sigma^+)}{\frac{b}{2}} \\ \Rightarrow \tau_y &= -\frac{2V_y}{I_z} \times \frac{\left( \frac{by^2}{4} - \frac{49bh^2}{576} \right)}{b} \\ \Rightarrow \tau_y &= \frac{2V_y}{I_z} \times \left( \frac{49h^2}{576} - \frac{y^2}{4} \right) \\ \Rightarrow \tau_y &= \frac{V_y}{2I_z} \times \left( \frac{49h^2}{144} - y^2 \right) \end{aligned}$$

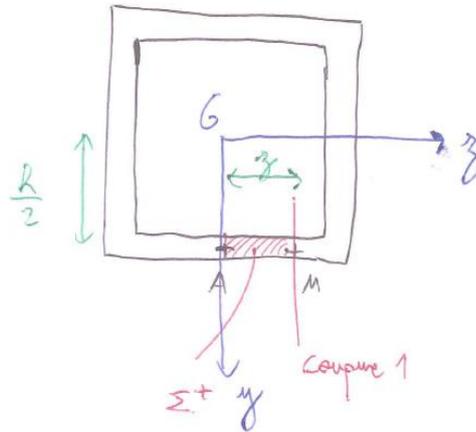
La répartition des contraintes est



**Remarque :** on constate que la théorie est mauvaise au niveau de la discontinuité.

## 17. Réponse exercice [ 17 ]

### a) Coupure 1



Dans le repère  $(G, y, z)$ , le point M a pour coordonnées :  $M \begin{pmatrix} h/2 \\ z \end{pmatrix}_{G, y, z}$

*Calcul du moment statique*

L'ordonnée du centre de gravité  $G_{\Sigma^+}$  de la surface  $\Sigma^+$  est  $y_{G_{\Sigma^+}} = \frac{h}{2}$

L'aire de la surface  $\Sigma^+$  est  $A_{\Sigma^+} = ez$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface  $\Sigma^+$  est égale à :

$$S_z(\Sigma^+) = y_{G_{\Sigma^+}} \times A_{\Sigma^+}$$

D'où

$$S_z(\Sigma^+) = \frac{ezh}{2}$$

*Equation de contrainte du cisaillement*

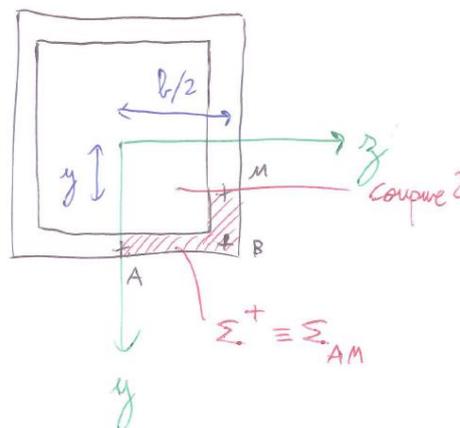
D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_A \times e_A - \tau_M \times e_M = -\frac{V_y}{I_z} \times S_z(\Sigma^+)$

Or par symétrie, le cisaillement en A est nul, donc  $\tau_A = 0$

De plus, l'épaisseur de l'élément est  $e_M = e$ .

Ainsi, le cisaillement est :  $\tau_M = -\frac{V_y}{I_z} \times \frac{zh}{2}$

### Coupure 2



La surface  $\Sigma^+$  est la somme de la surface  $\overline{AB}$  et de la surface  $\overline{BM}$ .

Or le moment statique  $S_z(\overline{AB}) = \frac{ebh}{4}$

*Remarque* : il suffit de remplacer z par b/2 dans le calcul du moment statique de la coupure 1.

Il ne reste donc que le moment statique du rectangle  $\overline{BM}$  à calculer

Dans le repère  $(G,y,z)$ , le point M a pour coordonnées :  $M \begin{pmatrix} y \\ b/2 \end{pmatrix}_{G,y,z}$

Calcul du moment statique du rectangle  $\overline{BM}$

L'ordonnée du centre de gravité  $G_{\overline{BM}}$  de la surface  $\overline{BM}$  est  $y_{G_{\overline{BM}}} = \frac{1}{2} \times \left( y + \frac{h}{2} \right)$

L'aire de la surface  $\overline{BM}$  est  $A_{\overline{BM}} = e \left( \frac{h}{2} - y \right)$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface  $\Sigma^+$  est égale à :

$$S_z(\overline{BM}) = y_{G_{\overline{BM}}} \times A_{\overline{BM}}$$

D'où

$$S_z(\overline{BM}) = \frac{e}{2} \times \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Or la surface  $\Sigma^+$  est la somme de la surface  $\overline{AB}$  et de la surface  $\overline{BM}$  donc le moment statique est égale à :  $S_z(\Sigma^+) = S_z(\overline{AB}) + S_z(\overline{BM}) = \frac{ebh}{4} + \frac{e}{2} \times \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{e}{8} [2bh + h^2 - 4y^2]$

Equation de contrainte du cisaillement

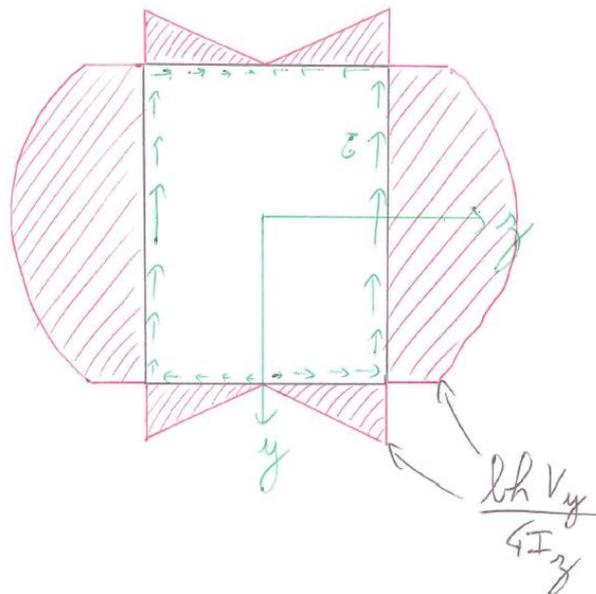
D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_A \times e_A - \tau_M \times e_M = -\frac{V_y}{I_z} \times S_z(\Sigma^+)$

Or par symétrie, le cisaillement en A est nul, donc  $\tau_A = 0$

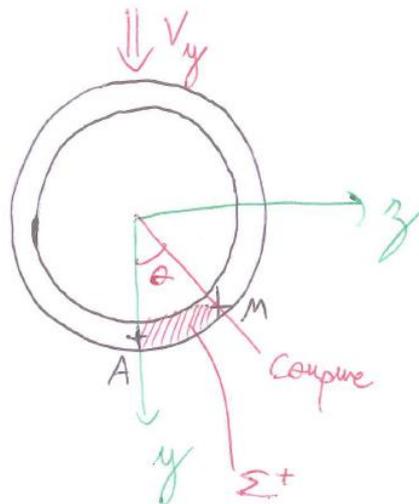
De plus, l'épaisseur de l'élément est  $e_M = e$ .

Ainsi, le cisaillement est :  $\tau_M = -\frac{V_y}{8I_z} \times [2bh + h^2 - 4y^2]$

Pour connaître la répartition des contraintes au niveau des autres branches, on utilise la symétrie de la section. Au final, la répartition des contraintes tangentes dues au cisaillement est



b) Création de la coupure



Calcul du moment statique de la surface  $\Sigma^+$

Par définition le moment statique est égale à :  $S_z(\Sigma^+) = \int_A^M y dS$

Or le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaire est :  $\begin{cases} y = R \times \cos \alpha \\ dS = e \times R \times d\alpha \end{cases}$

Donc  $S_z(\Sigma^+) = \int_0^\theta R \times \cos \alpha \times e \times R \times d\alpha = e \times R^2 \times [\sin \alpha]_0^\theta = eR^2 \sin \theta$

Répartition des contraintes

D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_A \times e_A - \tau_M \times e_M = -\frac{V_y}{I_z} \times S_z(\Sigma^+)$

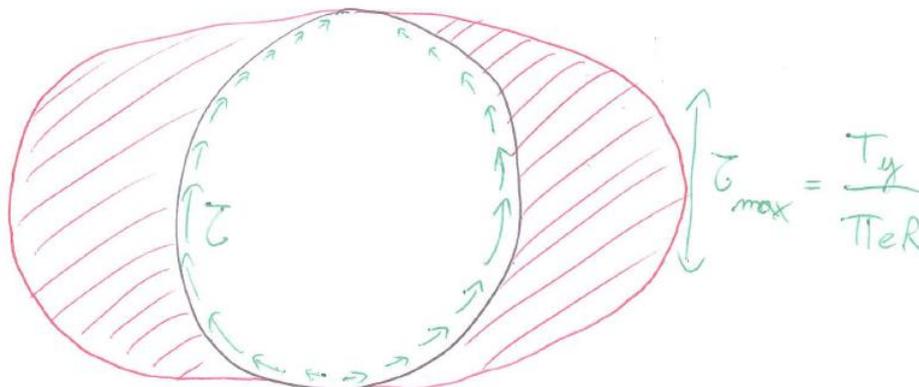
Or  $\tau_A = 0$  car A appartient à un axe de symétrie parallèle à la direction d'action de l'effort tranchant  $V_y$ .

D'où  $\tau_M \times e_M = \frac{V_y}{I_z} \times S_z(\Sigma^+) = \frac{V_y}{I_z} \times eR^2 \sin \theta$

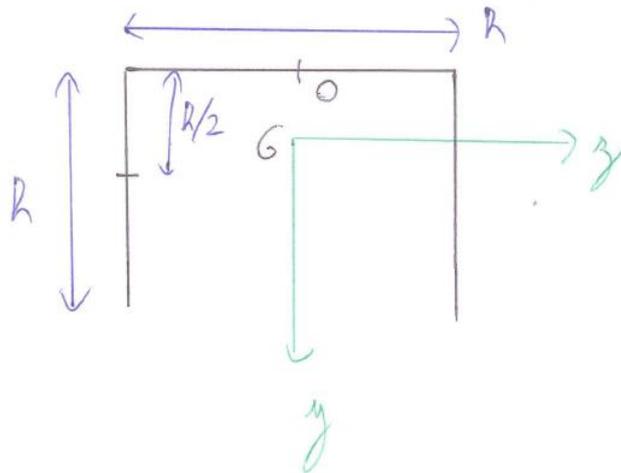
Et puisque  $e_M = e$  et que  $I_z = e\pi R^3$ .

Au final  $\tau_M = \frac{V_y}{e\pi R^3} \times R^2 \sin \theta = \frac{V_y \times \sin \theta}{e\pi R}$

La répartition des contraintes est :



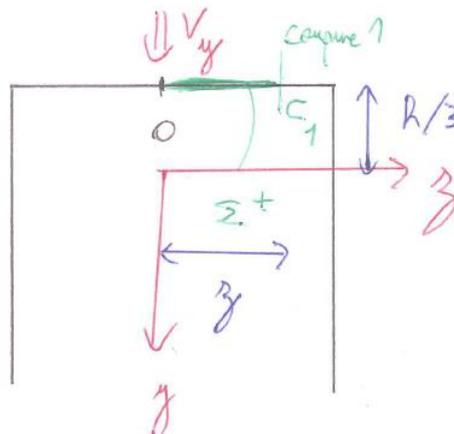
c)



Position du centre de gravité G de la section :

$$\overline{OG} = \frac{\frac{h}{2} \times eh + \frac{h}{2} \times eh + 0 \times eh}{3 \times eh} = \frac{h}{3}$$

Coupure 1



Dans le repère (G,y,z), le point C<sub>1</sub> a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} -h/3 \\ z \end{pmatrix}_{G,y,z}$

*Calcul du moment statique*

L'ordonnée du centre de gravité G<sub>Σ<sup>+</sup></sub> de la surface Σ<sup>+</sup> est  $y_{G_{\Sigma^+}} = -\frac{h}{3}$

L'aire de la surface Σ<sup>+</sup> est  $A_{\Sigma^+} = ez$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface Σ<sup>+</sup> est égale à :

$$S_z(\Sigma^+) = y_{G_{\Sigma^+}} \times A_{\Sigma^+}$$

D'où

$$S_z(\Sigma^+) = \frac{-ezh}{3}$$

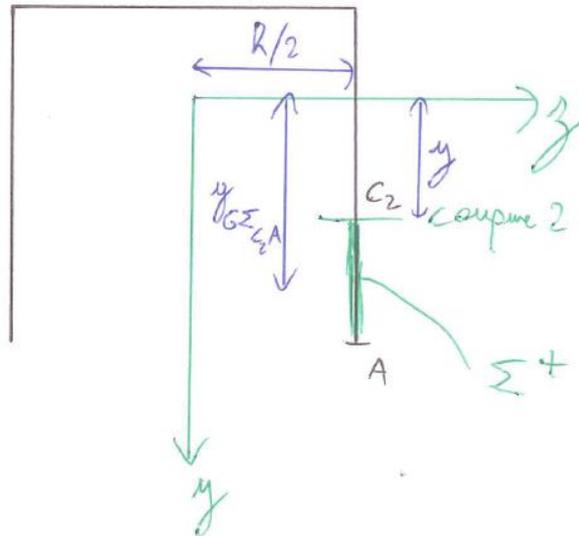
*Equation de contrainte du cisaillement*

D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_{c_1} \times e - \tau_0 \times e = -\frac{V_y}{I_z} \times S_z(\Sigma^+)$

Or  $\tau_0 = 0$  car O appartient à un axe de symétrie parallèle à la direction d'action de l'effort tranchant  $V_y$ .

Ainsi, le cisaillement est :  $\tau_{c_1} = \frac{zh}{3I_z} \times V_y$

Coupure 2



*Remarque* : il est tout à fait envisageable de faire une coupure entre O et C<sub>2</sub>, néanmoins ce choix impliquerait plus de calculs pour le calcul du moment statique que de faire une coupure entre A et C<sub>2</sub>.

Dans le repère (G,y,z) :

- le point C<sub>2</sub> a pour coordonnées  $\left(\frac{y}{h/2}\right)_{G,y,z}$
- le point A a pour coordonnées  $\left(\frac{2h/3}{h/2}\right)_{G,y,z}$

*Calcul du moment statique*

L'ordonnée du centre de gravité G<sub>Σ<sup>+</sup></sub> de la surface Σ<sup>+</sup> est  $y_{G_{\Sigma^+}} = \frac{1}{2} \left( \frac{2h}{3} + y \right)$

L'aire de la surface Σ<sup>+</sup> est  $A_{\Sigma^+} = e \left( \frac{2h}{3} - y \right)$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface Σ<sup>+</sup> est égale à :

$$S_z(\Sigma^+) = y_{G_{\Sigma^+}} \times A_{\Sigma^+}$$

D'où

$$S_z(\Sigma^+) = \frac{e}{2} \left( \frac{4h^2}{9} - y^2 \right)$$

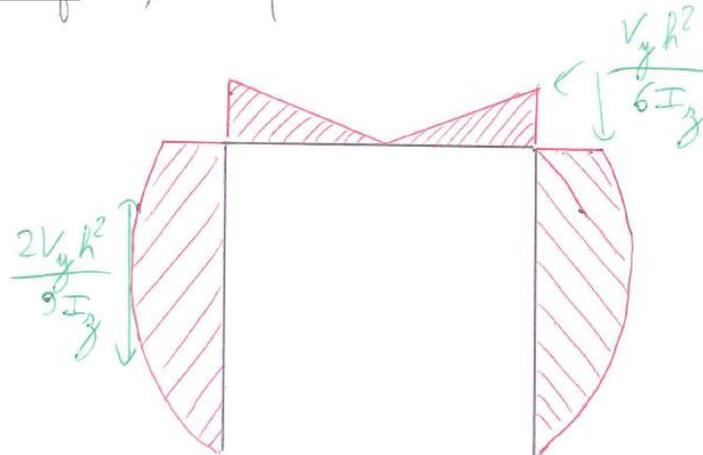
*Equation de contrainte du cisaillement*

D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_A \times e - \tau_{c_2} \times e = -\frac{V_y}{I_z} \times S_z(\Sigma^+)$

Or  $\tau_A = 0$  par réciprocité des contraintes.

Ainsi, le cisaillement est :  $\tau_{c_2} = \frac{V_y}{2I_z} \times \left( \frac{4h^2}{9} - y^2 \right)$

Répartition des contraintes :

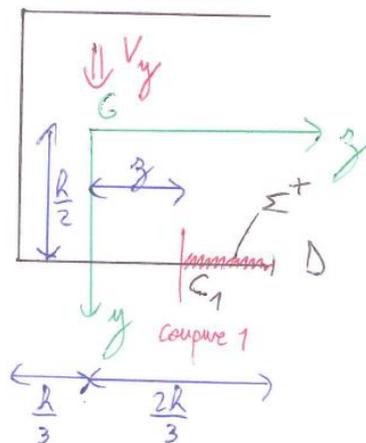


d)

Position du centre de gravité G de la section :

La position du centre de gravité a été calculée pour le cas précédent.

Coupure 1



Dans le repère  $(G,y,z)$ , le point  $C_1$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} h/2 \\ z \end{pmatrix}_{G,y,z}$

*Calcul du moment statique*

L'ordonnée du centre de gravité  $G_{\Sigma^+}$  de la surface  $\Sigma^+$  est  $y_{G_{\Sigma^+}} = \frac{h}{2}$

L'aire de la surface  $\Sigma^+$  est  $A_{\Sigma^+} = e \left( \frac{2h}{3} - z \right)$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface  $\Sigma^+$  est égale à :

$$S_z(\Sigma^+) = y_{G_{\Sigma^+}} \times A_{\Sigma^+}$$

D'où

$$S_z(\Sigma^+) = \frac{eh}{2} \left( \frac{2h}{3} - z \right)$$

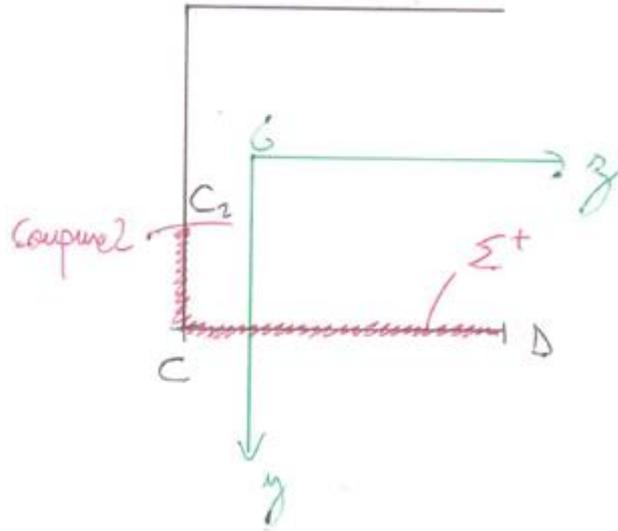
*Equation de contrainte du cisaillement*

D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_{c_1} \times e - \tau_D \times e = -\frac{V_y}{I_z} \times S_z(\Sigma^+)$

Or  $\tau_D = 0$  par réciprocité des contraintes.

Ainsi, le cisaillement est :  $\tau_{c_1} = \frac{-V_y}{I_z} \times \frac{h}{2} \left( \frac{2h}{3} - z \right)$

Coupure 2



Dans le repère (G,y,z) :

- le point C<sub>2</sub> a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} y \\ -h/3 \end{pmatrix}_{G,y,z}$
- le point C a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} h/2 \\ -h/3 \end{pmatrix}_{G,y,z}$

La surface  $\Sigma^+$  est la somme de la surface  $\overline{CD}$  et de la surface  $\overline{CC_2}$ .

Or le moment statique  $S_z(\overline{CD}) = \frac{eh}{2} \left( \frac{2h}{3} - \left( -\frac{h}{3} \right) \right) = \frac{eh^2}{2}$

Remarque : il suffit de remplacer z par -h/3 dans le calcul du moment statique de la coupure 1.

Il ne reste donc que le moment statique de la surface  $\overline{CC_2}$  à calculer

*Calcul du moment statique de la surface  $\overline{CC_2}$*

L'ordonnée du centre de gravité  $G_{\overline{CC_2}}$  de la surface  $\overline{CC_2}$  est  $y_{G_{\overline{CC_2}}} = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)$

L'aire de la surface  $\overline{CC_2}$  est  $A_{\overline{CC_2}} = e \left( \frac{h}{2} - y \right)$

D'après le cours, le moment statique par rapport à l'axe z de la surface  $\Sigma^+$  est égale à :

$$S_z(\overline{CC_2}) = y_{G_{\overline{CC_2}}} \times A_{\overline{CC_2}}$$

D'où

$$S_z(\overline{CC_2}) = \frac{e}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

*Calcul du moment statique de la surface  $\Sigma^+$*

La surface  $\Sigma^+$  est la somme de la surface  $\overline{CD}$  et de la surface  $\overline{CC_2}$  donc le moment statique est égal à  $S_z(\Sigma^+) = S_z(\overline{CD}) + S_z(\overline{CC_2}) = \frac{eh^2}{2} + \frac{e}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{e}{2} \left( \frac{5h^2}{4} - y^2 \right)$

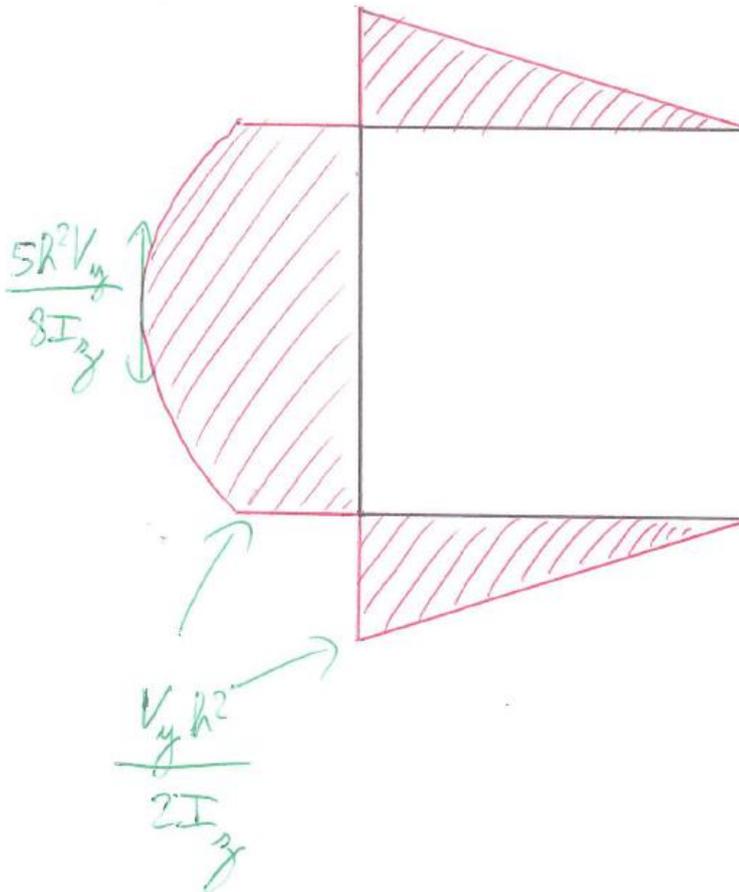
*Equation de contrainte du cisaillement*

D'après le cours, le cisaillement au niveau de la coupure est :  $\tau_{c_2} \times e - \tau_D \times e = -\frac{V_y}{I_z} \times S_z(\Sigma^+)$

Or  $\tau_D = 0$  par réciprocité des contraintes.

Ainsi, le cisaillement est :  $\tau_{c_2} = \frac{V_y}{2I_z} \times \left( \frac{5h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{V_y}{8I_z} \times (5h^2 - 4y^2)$

Répartition des contraintes :



## 18. Réponse exercice [ 18 ]

D'après le cours, pour un profil mince ouvert :  $\tau_{max} = \frac{3 \times M_t \times e}{e^3 \times h}$

Donc  $\tau_{max} = \frac{3 \times M_t}{e^2 \times h}$

## 19. Réponse exercice [ 19 ]

1) Le profil est mince et fermé.

La surface intérieure au contour moyen est  $\Sigma_{int} = 0,1 \times 0,1 = 0,01 \text{ m}^2$

Avec l'épaisseur est  $e = 0,01 \text{ m}$

Or la contrainte tangente due à la torsion est d'après le cours  $t_i = \frac{-M_t}{e_i \times 2 \Sigma_{int}}$

Donc la contrainte tangente due à la torsion en valeur absolue est  $|t_i| = \frac{50}{0,01 \times 2 \times 0,01} = 250000 \text{ Pa}$

Et au final,  $|t_i| = 0,25 \text{ MPa}$

2) La propriété du flux du cisaillement implique que  $|t_i| = 0,5 \text{ MPa}$ . En effet, l'épaisseur étant 2 fois plus petite que pour la question 1), la contrainte tangente est 2 fois plus importante.

Remarque : le résultat précédent se démontre également par le calcul, puisqu'ils sont strictement identiques à précédemment mais avec  $e = 0,005 \text{ m}$ .

$$|t_i| = \frac{50}{0,005 \times 2 \times 0,01} = 500000 \text{ Pa} \equiv 0,5 \text{ MPa}$$

## 20. Réponse exercice [ 20 ]

Par application directe du cours pour les profils minces ouverts :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{3 \times M_t \times e_1}{e_1^3 \times h_1 + e_2^3 \times h_2 + e_3^3 \times h_3} \\ t_2 = \frac{3 \times M_t \times e_2}{e_1^3 \times h_1 + e_2^3 \times h_2 + e_3^3 \times h_3} \\ t_3 = \frac{3 \times M_t \times e_3}{e_1^3 \times h_1 + e_2^3 \times h_2 + e_3^3 \times h_3} \end{cases}$$

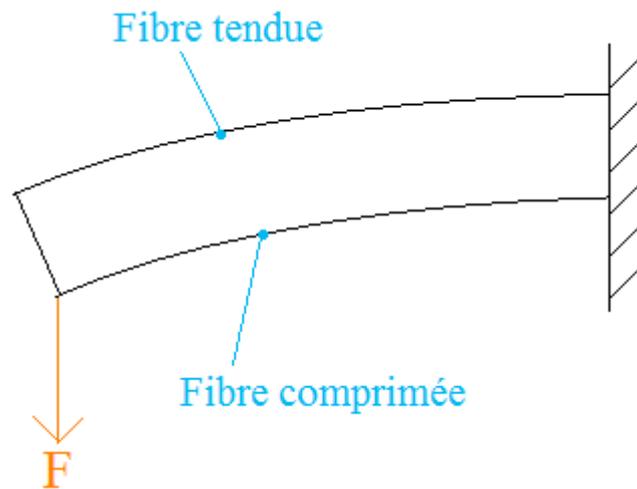
## 21. Réponse exercice [ 21 ]

a) Moment fléchissant autour de z

Le moment fléchissant en valeur absolue au niveau de la section centrale est égal à :

$$2,5 \times 300 = 750 \text{ kg.m} \leftrightarrow 7,5 \text{ kN.m}$$

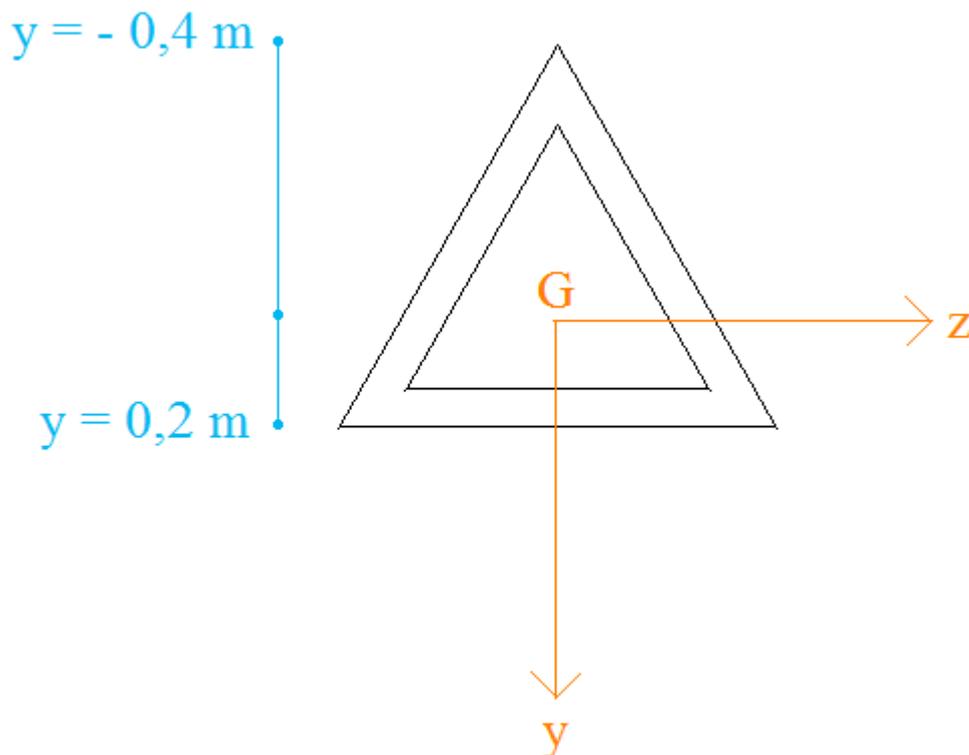
Or en respectant les conventions de RDM, lorsque la fibre supérieure est comprimée, cela signifie que le moment est négatif.



Ainsi  $M_z = -7,5 \text{ kN.m}$

L'inertie de la section est environ égale à :  $\frac{0,6 \times 0,6^3}{36} - \frac{0,5 \times 0,5^3}{36} \approx 1,86 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

Les fibres supérieures et inférieures se situent aux niveaux :



Or les contraintes normales au niveau des fibres supérieure et inférieure sont égales à :

$$\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} \times y$$

Cependant, l'effort normal est nul, donc :

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \times y$$

Au final :

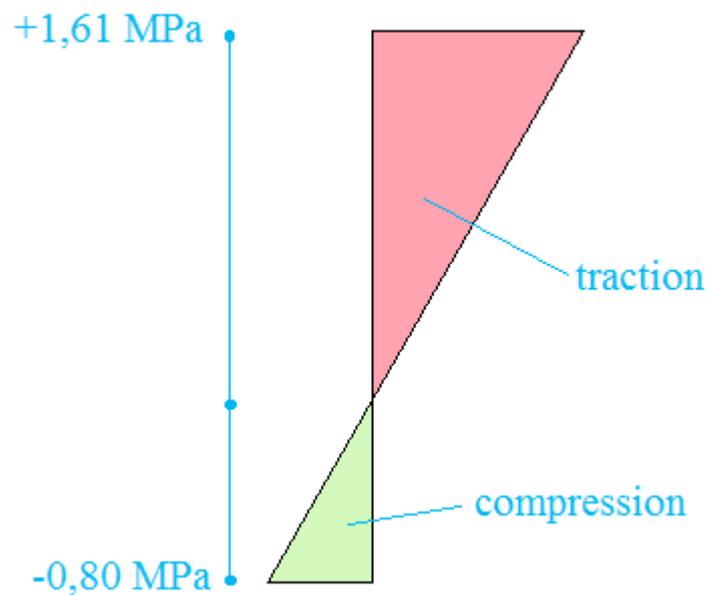
Au niveau de la la fibre supérieure :

$$\sigma_{sup} = \frac{-7,5}{1,86 \cdot 10^{-3}} \times (-0,4) \approx 1610 \text{ kPa} \leftrightarrow 1,61 \text{ MPa}$$

Au niveau de la la fibre inférieure :

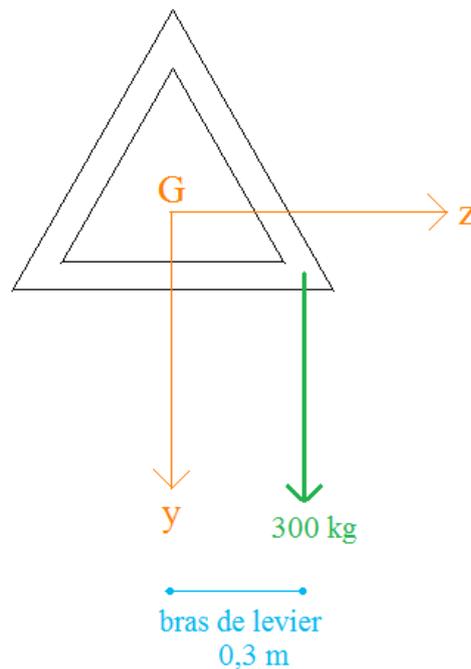
$$\sigma_{inf} = \frac{-7,5}{1,86 \cdot 10^{-3}} \times (0,2) \approx -810 \text{ kPa} \leftrightarrow -0,81 \text{ MPa}$$

Une vue de profil avec les contraintes normales est :



b) Le moment de torsion est égal à la force multipliée par le bras de levier.

Une vue de face est :



Ainsi le moment de torsion est égal à  $M_x = 0,3 \times 300 = 90 \text{ kg.m} \leftrightarrow 0,9 \text{ kN.m}$

Dans le cas d'un profil mince, la valeur de la contrainte est égale à :

$$t_i = \frac{-M_x}{e_i \times 2 \times \Sigma_{int}}$$

La surface intérieure est environ égale à :  $\Sigma_{int} \approx \frac{0,5^2}{2} = 0,125 \text{ m}^2$

L'épaisseur du profil est de 0,05 m.

Au final la contrainte de torsion est égale à :

$$t_i = \frac{-0,9}{0,05 \times 2 \times 0,125} = -72 \text{ kPa}$$

## 22. Réponse exercice [ 22 ]

Pour l'arbre plein, la contrainte tangente maximale vaut :

$$\frac{-2M_t}{\pi R_1^3}$$

Pour le tube épais, la contrainte tangente maximale vaut :

$$\frac{-2M_t}{\pi(R_2^3 - (0,7R_2)^3)} = \frac{-2M_t}{0,76\pi R_1^3}$$

Ainsi, en égalant les contraintes, on a :

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = \frac{1}{0,76} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} \approx 1,10$$

La masse linéique de l'arbre plein vaut :

$$m_1 = \pi R_1^2 \rho$$

La masse linéique de l'arbre plein vaut :

$$m_2 = \pi(R_2^2 - (0,7R_2)^2)\rho = 0,51\pi R_2^2\rho$$

Ainsi le rapport des masses vaut :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1^2}{0,51R_2^2} = \frac{1}{0,51} \times \left(\frac{1}{1,10}\right)^2 = 1,62$$

### 23. Réponse exercice [ 23 ]

p seul :

$$M_{z,max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{1500 \times 10^2}{8} = 18750 \text{ N.m pour } x = 5 \text{ m}$$

F seul :

$$\begin{cases} N = F \\ M_z = -e \times F = -0,1F \end{cases}$$

Effet de p et F conjugués : (au niveau de  $x = 5 \text{ m}$ )

$$\begin{cases} N = F \\ M_z = 18750 - 0,1F \end{cases}$$

Contrainte normale :

$$\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} \times y$$

Caractéristiques géométriques :

$$\begin{cases} S = 0,5 \times 1 = 0,5 \text{ m}^2 \\ I_z = \frac{1 \times 0,5^3}{12} \end{cases}$$

La contrainte la moins comprimée (ou la plus tendue) est la valeur maximale de la contrainte, c'est-à-dire pour  $y = 0,5/2 = 0,25 \text{ m}$ .

L'objectif est d'avoir en tout point une contrainte de compression, c'est-à-dire que la contrainte est négative ou nulle en tous points, ainsi :

$$\sigma = -\frac{F}{0,5} + \frac{12 \times (18750 - 0,1F)}{1 \times 0,5^3} \times 0,25 \leq 0$$

$$\Rightarrow F \geq 102300 \text{ N} \leftrightarrow \boxed{F \geq 10,23 \text{ tonnes}}$$